

Mathematik 2 für Informatiker

Mitschrift der Erstsemester Analysis-Vorlesung
bei Frau Prof. Dr. Edda Eich-Söllner
im Wintersemester 1999/2000

Stand: 24. Juli 2002

Vorwort

Rechtliches

Copyright (c) Frank Markus Abbühl.

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.1 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, with no Front-Cover Texts, and with no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".¹

Anregungen

Dieses Skript ist noch lange nicht fertig. Es fehlen noch zahllose Beispiele, Bilder und Grafiken, ja sogar einige Kapitel. In vielen Fällen könnten genauere Erklärungen nicht schaden. Außerdem enthält das Skript noch zahllose inhaltliche Fehler und ist auch noch weit von einem perfekten Layout entfernt. All dies sind verbesserungswürdige Punkte und jeder, den die Lust packt, ein bißchen mit L^AT_EXherumzuexperimentieren, der sei hiermit aufgefordert, zur Verbesserung des Skriptes beizutragen. Der gesamte Quellcode ist zu finden unter <http://www.informatik.fh-muenchen.de/~ifw99001/>. Ich würde nur darum bitten, mir die entsprechend verbesserten Versionen auch wieder zukommen zu lassen.

Danksagung

Herzlich Danken möchte ich Frau Prof. Dr. Edda Eich-Söllner, nach deren Vorlesung dieses Skript erstellt wurde. Dank gebührt auch der Anita und dem Dan, die mir mit einer engelsgeduld oft wochenlang ihre Mitschriften ausgeliehen haben, weil ich mal wieder die Vorlesung verschlafen hatte. Weiterhin möchte ich allen Danken, die mich moralisch oder durch konstruktive Kritik, Hinweise auf Fehler etcetera unterstützt haben.

Viel Spaß beim Lernen und viel Erfolg bei der Prüfung, da phrank.

¹Der genaue Text findet sich unter <http://www.fsf.org/copyleft/fdl.html>

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen	1
1.1 Die Menge der reellen Zahlen	1
1.1.1 Mengen	1
1.1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen	2
1.1.3 Anordnung der reellen Zahlen	2
1.1.4 Betrag	2
1.1.5 Intervalle	3
1.1.6 Schranken	3
1.2 Beweisverfahren	3
1.2.1 Direkter Beweis	4
1.2.2 Indirekter Beweis	4
1.2.3 Vollständige Induktion	4
2 Folgen und Reihen	6
2.1 Unendliche Folgen reeller Zahlen	6
2.1.1 Arithmetische Folgen	6
2.1.2 Geometrische Folgen	7
2.1.3 Sonstige Folgen	8
2.2 Summen reeller Zahlen	8
2.2.1 Endliche Summen	8
2.2.2 Unendliche Reihen	9
3 Reelle Funktionen	14
3.1 Polynome	14
3.1.1 Konstante und lineare Funktionen	14
3.1.2 Polynome höherer Ordnung	15
3.1.3 Horner Schema	16
3.1.4 Polynominterpolation	17
3.1.5 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz	19
3.2 Die Betragsfunktion	20
3.3 Trigonometrische Funktionen	21
3.3.1 Sinus und Cosinus	21
3.3.2 Tangens und Cotangens	23
3.3.3 Umrechnungsregeln	24
3.3.4 Lösungen goniometrischer Gleichungen	24
3.4 Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktion	25
3.4.1 Die Wurzelfunktion	25
3.4.2 Die Exponentialfunktion	26

3.4.3	Die Logarithmusfunktion	26
3.4.4	Lösung von Exponential- und Logarithmusgleichungen	27
3.5	Eigenschaften von Funktionen	27
3.5.1	Monotonie	27
3.5.2	Symmetrie	28
3.5.3	Periodizität	28
3.5.4	Grenzwerte	28
3.5.5	Stetigkeit	29
3.5.6	Umkehrfunktion	30
4	Differentiation	32
4.1	Ableitung	32
4.1.1	Rechenregeln	33
4.1.2	Höhere Ableitungen	35
4.1.3	Implizite Differentiation	35
4.2	Anwendungen der Differentiation	36
4.2.1	Maxima und Minima	36
4.2.2	Mittelwertsatz	37
4.2.3	Wendepunkte	38
4.2.4	Die Regel von l'Hopital	39
4.2.5	Kurvendiskussion	39
4.3	Das Newton-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen	39
4.4	Differential und Fehleranalyse	41
4.4.1	Differential	41
4.4.2	Differentielle Fehleranalyse	41
4.5	Potenzreihen	41
4.5.1	Konvergenzradius	42
4.5.2	Taylor- und McLaurin Reihen	42
5	Integralrechnung	44
5.1	Das bestimmte Riemann'sche Integral	44
5.2	Eigenschaften des Riemann-Integrals	45
5.3	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	46
5.4	Stammfunktionen, Rechenregeln, Grundintegrale	46
5.5	Berechnung bestimmter Integrale mittels Stammfunktion	47
5.5.1	Fläche zwischen Funktionsgraphen	47
5.6	Partielle Integration	48
5.7	Substitution	48
5.8	Integration gebrochen-rationaler Funktionen	49
5.9	Uneigentliche Integrale	49
5.9.1	Unendliches Integrationsintervall	49
5.9.2	Unbeschränkter Integrand	50
5.10	Numerische Integration	50
5.10.1	Trapezregel	50
5.10.2	Simpsonregel	51
5.11	Kurvenlängen und Flächenmessung	51
5.11.1	Kurvenlänge	51
5.11.2	Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers	51

A	Übungsblätter	54
A.1	Blatt 1	54
A.2	Blatt 2	54
A.3	Blatt 3	55
A.4	Blatt 4	55
A.5	Blatt 5	56
A.6	Blatt 6	56
A.7	Blatt 7	56
A.8	Blatt 8	57
A.9	Blatt 9	57
A.10	Blatt 10	57

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Die Menge der reellen Zahlen

1.1.1 Mengen

Definition 1.1 Eine Menge ist die Ansammlung von Objekten zu einem Ganzen.

- Beschreibung durch Aufzählung der Elemente: $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots\}$
- Beschreibung mittels ihrer Eigenschaften: $M = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } E\}$

Beispiel 1.1 $M = \{x \mid x \text{ ist ganze Zahl und } x^2 < 15\} = \{0; 1; 2; 3; -1; -2; -3\}$

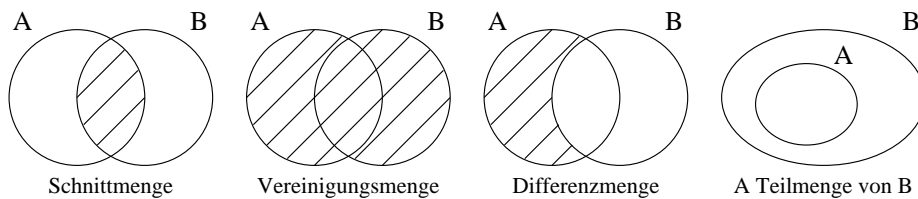


Abbildung 1.1: Darstellung durch Mengendiagramme

Notation

- Element a gehört zur Menge A : $a \in A$
- A heißt Teilmenge von B : $A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$
- Schnittmenge: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
- Vereinigungsmenge: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
- Differenzmenge: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
- Natürliche Zahlen (abgeschlossen bezüglich "+" und "."): $N = \{1; 2; 3; \dots\}$

- Ganze Zahlen (abgeschlossen bezüglich "+", "-", "."): $Z = \{\dots; -3; -2; 0; 1; 2; 3; \dots\}$
- Rationale Zahlen, abbrechende und periodische Zahlen. Maschinenzahlen sind eine Teilmenge von \mathbb{Q} . (abgeschlossen bezüglich "+", "-", ".", ":"): $Q = \{\frac{p}{q} \mid p \in Z, q \in Z \setminus \{0\}\}$
- Reelle (irrationale) Zahlen, also alle Rationalen Zahlen und Zahlen mit unendlich vielen Dezimalstellen, zum Beispiel π , ε , $\sqrt{2}$ und so weiter.

1.1.2 Eigenschaften der reellen Zahlen

Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

Distributivgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1.1.3 Anordnung der reellen Zahlen

Für zwei Zahlen a und b gilt genau eine der drei Eigenschaften:

$$a < b, \quad b < a \quad \text{oder} \quad a = b$$

Diese Eigenschaften gelten *nicht* im Mehrdimensionalen Raum (zum Beispiel bei Vektoren).

Transitivität

$$\begin{aligned} a < b \text{ und } b < c &\Rightarrow a < c \\ a < b &\Rightarrow a + c < b + c \\ a < b \text{ und } c > 0 &\Rightarrow ac < bc \end{aligned}$$

1.1.4 Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & : a \geq 0 \\ -a & : a < 0 \end{cases}$$

Der Abstand der Punkte a und b auf der Zahlengeraden ist $|a - b|$.

Rechenregeln

- $|a| \geq 0$
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$
- $|a + b| \leq |a| + |b|$

1.1.5 Intervalle

- $[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \mid a < x < b\}$
- $[a, b[= \{x \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

Definition 1.2 ε -Umgebung:

$$U_\varepsilon(a) =]a - \varepsilon, a + \varepsilon[= \{x \mid |x - a| < \varepsilon\}$$

1.1.6 Schranken

Definition 1.3 Eine Menge S heißt nach oben beschränkt, wenn es für alle Elemente b aus der Menge R ein Element s aus der Menge S gibt, für das gilt: $s \leq b$. b heißt obere Schranke von S .

$$\text{Eine Menge } S \text{ heißt nach oben beschränkt} \Leftrightarrow \bigvee_{b \in R} \bigwedge_{s \in S} s \leq b$$

Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*, geschrieben als $\sup_{s \in S}$.

Definition 1.4

$$\text{Eine Menge } S \text{ heißt nach unten beschränkt} \Leftrightarrow \bigvee_{b \in R} \bigwedge_{s \in S} s \geq b$$

Die größte untere Schranke heißt *Infimum*, geschrieben als $\inf_{s \in S}$.

1.2 Beweisverfahren

Man unterscheidet zwischen *direkten* und *indirekten* Beweisverfahren sowie *vollständiger Induktion*.

1.2.1 Direkter Beweis

Man beweist eine Aussage direkt durch Anwendung der Gesetze der Logik und der elementaren Algebra.

Beispiel 1.2 *Gesucht ist die Summe s der natürlichen Zahlen von 1 bis n .*

$$\begin{array}{rcccccccc} s & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & (n-1) & + & n \\ s & = & n & + & (n-1) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2s & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & \dots & + & \dots & + & (n+1) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow s = \frac{n(n+1)}{2}$$

1.2.2 Indirekter Beweis

Man beweist eine Aussage indirekt, indem man das Gegenteil annimmt und diese Annahme widerlegt.

Beispiel 1.3 $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, das heißt $\sqrt{2}$ läßt sich nicht als Bruch darstellen. Man nimmt an, $\sqrt{2}$ sei ein Bruch und leiten daraus einen Widerspruch her.

Annahme: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Voraussetzungen: p, q Teilerfremd; $p \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ ist gerade $\Rightarrow p$ ist gerade $\Rightarrow p = 2r; r \in \mathbb{Z}$

Die Voraussetzung, daß p und q teilerfremd sein sollen, wird hier verletzt, der Widerspruch ist damit hergeleitet.

1.2.3 Vollständige Induktion

Eine Aussage $A(n)$ kann bewiesen werden, indem man zeigt:

- Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr
- Induktionsschluß: Man nimmt an, daß $A(n)$ wahr ist und zeigt, daß auch $A(n+1)$ wahr ist.

Beispiel 1.4 *Behauptung: $2n \leq 2^n$*

Induktionsanfang: $n = 1 : 2 \cdot 1 \leq 2^1$ ist wahr.

Induktionsschluß:

- *Annahme: Es gilt $2n \leq 2^n$.*
- *Behauptung: $2(n+1) \leq 2^{n+1}$*
- *Beweis: $2(n+1) = 2n + 2 \leq 2^n + 2 = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$*

Beispiel 1.5 *Behauptung: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$*

Induktionsanfang: $n = 1; 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$ (wahr)

Induktionsschluß:

- *Annahme: Es gilt: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$*

- *Behauptung:*

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

- *Beweis:*

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Kapitel 2

Folgen und Reihen

2.1 Unendliche Folgen reeller Zahlen

Definition 2.1 Ordnet man jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zu, so erhält man eine unendliche Folge reeller Zahlen, kurz: Folge.

Schreibweise: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = a_1, a_2, a_3, \dots$

Beispiel 2.1 $a_n = \frac{1}{n^2}$; Einsetzen: $n = 1, 2, 3, 4, \dots \rightarrow 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$

Beispiel 2.2 Turm von Hanoi: FEHLT

2.1.1 Arithmetische Folgen

Die Differenz zwischen aufeinanderfolgenden Folgengliedern einer Arithmetischen Folge ist konstant.

$$d = a_{n+1} - a_n = \text{konstant}$$

Allgemein:

- Rekursive Definition: $a_{n+1} = a_n + d$
- Explizite Definition: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Will man zwischen zwei Zahlen a und b weitere m Zahlen einschalten, so daß alle Zahlen eine arithmetische Folge bilden, dann gilt für die Differenz

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

$$a_n = a + (n - 1) \cdot d$$

Beispiel 2.3 $(2n - 1)_{n \in \mathbb{N}} = 1, 3, 5, 7, \dots$

2.1.2 Geometrische Folgen

Jedes Folgenglied unterscheidet sich durch einen konstanten Faktor q vom vorherigen Glied.

$$a_{n+1} = q \cdot a_n \Leftrightarrow q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Allgemein:

- $a_1, a_1q^1, a_1q^2, a_1q^3, \dots$
- Rekursive Definition: $a_{n+1} = a_nq$
- Explizite Definition: $a_n = a_1q^{n-1}$

Beispiel 2.4 *Beispiele für geometrische Folgen:* $a_1 = 1; q = \frac{1}{2} \longrightarrow 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$

$a_1 = 4; q = 2 \longrightarrow 4, 8, 16, 32, 64, \dots$

$a_1 = 1; q = -1 \longrightarrow 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

Man unterscheidet:

- q positiv: Alle Glieder haben das selbe Vorzeichen, ist das Anfangsglied negativ, sind auch alle Folgenglieder negativ:

$q > 1$: Die Folge wächst unbeschränkt, zum Beispiel $q = 3$: $3, 9, 27, 81, \dots$

$q < 1$: Die Folge fällt gegen Null, zum Beispiel $q = \frac{1}{2}$: $8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

$q = 1$: Konstante Folge, zum Beispiel $5, 5, 5, 5, \dots$

- q negativ: Die Glieder haben ein abwechselndes Vorzeichen (alternierende Folge):

$q < -1$: zum Beispiel $q = -3$: $3, -9, 27, -81, \dots$

$-1 < q < 0$: zum Beispiel $q = -\frac{1}{2}$: $8, -4, 2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$

$q = -1$: zum Beispiel: $5, -5, 5, -5, 5, -5, \dots$

Will man zwischen zwei Zahlen a und $b > 0$ weitere m Zahlen so einschalten, daß eine geometrische Folge mit $a_{m+2} = b$ entsteht, so gilt:

$$q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}, \quad a_n = a_1q^{n-1}$$

Beispiel 2.5 *Zwischen den Zahlen 3 und 96 sollen 4 Zahlen eingeschaltet werden, so daß eine geometrische Folge entsteht:*

$$q = \sqrt[5]{\frac{96}{3}} = \sqrt[5]{32} = 2, 3, 6, 12, 24, 48, 96, \dots$$

Anwendung von geometrischen und arithmetischen Folgen: Vorzugszahlen

Ein Gegenstand soll in verschiedenen Größen hergestellt werden. Häufig ist bei arithmetischer Stufung der Sprung bei den kleinen Zahlen zu groß, so daß in technischer Anwendung meist geometrische Stufungen verwendet werden.

2.1.3 Sonstige Folgen

Vorsicht! Rekursiv definierte Folgen lassen sich nicht immer explizit umschreiben.

Beispiel 2.6 *Babylonisches Wurzelziehen*

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right);$$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = \frac{3}{2} \approx 1.5$$

$$a_3 = \frac{17}{12} \approx 1.417$$

$$\vdots$$

$$a_n \rightarrow \sqrt{2}$$

Beispiel 2.7 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (n!)_{n \in \mathbb{N}}$ lässt sich nur rekursiv definieren: $a_1 = 1, a_n = n \cdot a_{n-1}$

Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert (Limes) a , wenn zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein Index n_0 existiert.

$$|a_n - a| < \varepsilon \forall n > n_0$$

Man schreibt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

2.2 Summen reeller Zahlen

Man unterscheidet zwischen endlichen Summen und Reihen.

2.2.1 Endliche Summen

Allgemein:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Beispiel 2.8 *Beispiele für endliche Summen:*

Summe der ersten n natürlichen Zahlen: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i$

Summe der Quadrate der Zahlen von 1 bis 100: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2 = \sum_{i=1}^{100} i^2$

Summe der Quadrate aller ungeraden Zahlen von 1 bis 100: $1 + 3 + 5 + \dots + 99 = \sum_{i=1}^{50} (2i - 1)^2$

Rechenregeln

- Index verschieben:

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}$$

- Konstanter, von i unabhängiger Faktor:

$$\sum_{i=1}^n ca_i = ca_1 + ca_2 + \dots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = c \sum_{i=1}^n a_i$$

- Addition:

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$$

Beispiel 2.9 *Arithmetische Folge:* $a_1 = 5; d = 3: 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 = (5 + 20) + (8 + 17) + (11 + 14) = 3 \cdot 25 = 75$

2.2.2 Unendliche Reihen

Bei unendlichen Reihen entspricht der obere Index statt n unendlich (∞).

Definition 2.2 *Addiert man die Elemente a_n auf: $n_1 = a_1; n_2 = a_1 + a_2; n_3 = a_1 + a_2 + a_3; \dots; n_k = a_1 + \dots + a_k$, so entsteht die Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Die Folge heißt Reihe. Die s_k heißen Partialsummen. konvergiert $s_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$, dann schreibt man:*

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

Vorsicht: Erst mit unendlichen Summen rechnen, wenn man weiß, daß sie konvergieren. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel 2.10

$$s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \quad \text{konvergiert}$$

Behauptung: $s = 2$

$$2s = 2 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots}_s = 2 + s \Leftrightarrow s = 2$$

aber:

$$\begin{aligned} T &= 1 + \underbrace{2 + 4 + 8 + 16 + \dots}_{2T} \quad \text{divergiert} \\ 2T &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = T - 1 \\ \Leftrightarrow T &= -1 \quad \text{Unsinn!} \end{aligned}$$

Geometrische Reihe

$$s_n = \sum_{i=0}^n q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & : q \neq 1 \\ n+1 & : q = 1 \end{cases}$$

Beweis 2.1

$$q = 1 \quad s_n = \sum_{i=0}^n 1^2 = n + 1$$

$$q \neq 1 \quad \begin{array}{l} s_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n \\ qs_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + q^n + q^{n+1} \\ \hline s_n - qs_n = 1 - q^{n+1} \\ \Rightarrow s_n(1 - q) = 1 - q^{n+1} \Rightarrow s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{array}$$

Unendliche geometrische Reihe

$$q \geq 1 \quad \sum_{i=0}^n q^i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$q < 1 \quad \sum_{i=0}^n q^i = s_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - q}$$

Beispiel 2.11 *Verzinsung: DM 600.- werden jährlich eingezahlt und mit 6% verzinst. Welcher Kontostand ergibt sich nach 7 Jahren?*

$q = 1 + p = 1.06$

Nach 1 Jahr: $600q$

Nach 2 Jahren: $(600q + 600) \cdot q = 600q(1 + q)$

Nach 3 Jahren: $(600q(1 + q) + 600) \cdot q = 600q(1 + q + q^2)$

...

Nach n Jahren: $600q \cdot (1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}) = 600q \frac{1 - q^n}{1 - q}$

für $n = 7$: 5338.48 DM.

Beispiel 2.12 *Quadrat: Einem Quadrat mit Kantenlänge $\sqrt{2}$ wird ein gleichschenkliges Dreieck mit Fläche 1 einbeschrieben, dem verbleibenden Dreieck wird wiederum ein Dreieck einbeschrieben und so weiter. Wie groß ist die Gesamtfläche der Dreiecke?*

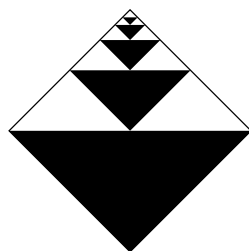


Abbildung 2.1: In ein Quadrat einbeschriebene Dreiecke

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Beispiel 2.13 *Eisblume*: Gesucht ist der Flächeninhalt F_n und der Umfang U_n der abgebildeten Figur nach der n -ten Iteration. Begonnen wird mit einem gleichschenkligen Dreieck.

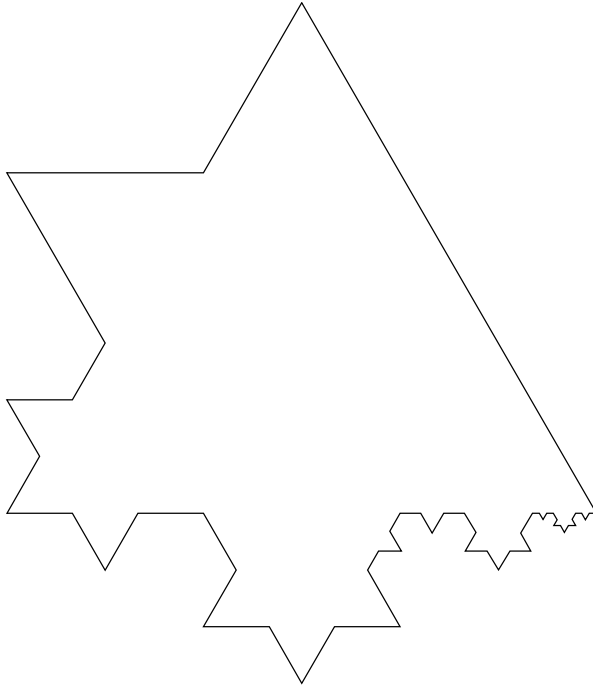


Abbildung 2.2: Entstehung einer Eisblume

Umfang

$$U_n = \frac{4}{3} \cdot U_{n-1} = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot U_0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$$

Flächeninhalt $F_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

K_n Anzahl der Begrenzungslinien, $K_0 = 3$.

$$K_n = 4K_{n-1} = 4^n K_0$$

Δ_n : Fläche eines einzelnen, neuen Dreiecks. $\Delta_0 = F_0$.

$$\Delta_n = \frac{1}{9} \Delta_{n-1} = \dots = \left(\frac{1}{9}\right)^n \Delta_0$$

$$F_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{4 \cdot 3}_{K_i} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{9}\right)^{i+1} \frac{\sqrt{3}}{4}}_{\Delta_{i+1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + 3 \frac{1}{9} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9} \right)^i \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} F_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \right) =
 \end{aligned}$$

Beispiel 2.14 Konvergiert die Reihe $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$?

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n!} &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{3}}_{\leq \frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq \frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \\
 \Rightarrow \sum_{n=0}^k \frac{1}{n!} &\leq \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = 2 \sum_{n=0}^k \left(\frac{1}{2} \right)^n = 2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{2}} \leq 4
 \end{aligned}$$

Numerisch:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e$$

Beispiel 2.15 Konvergiert die (harmonische) Reihe $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$?

$$\begin{aligned}
 s_{2k+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{s^k + 1} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \right)}_{\geq \frac{1}{2}} \\
 &\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{3}{2} + k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow s_n$ wächst über alle Grenzen, obwohl die Folgeglieder eine Nullfolge sind. Vorsicht also bei numerischen Grenzübergängen!

Beispiel 2.16 Noch ein warnendes Beispiel: Bei nicht-konvergenten Reihen ist auch das Setzen von Klammern nicht erlaubt!

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (-1)^i &= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots = \begin{cases} 0 & : n \text{ gerade} \\ 1 & : n \text{ ungerade} \end{cases} \\
 \sum_{i=1}^n (-1)^i &= \begin{cases} -1 + (1-1) + (1-1) + \dots & = -1 \\ (-1+1) + (-1+1) + \dots & = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Konvergenzkriterien für Reihen

Definition 2.3 Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn die Reihe der Absolutbeträge $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

- Bei einer konvergenten Reihe konvergieren die Glieder gegen Null:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = s \Rightarrow a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

Die Umkehrung gilt nicht, siehe zum Beispiel die harmonische Reihe.

- *Monotonie-Kriterium:* Eine Reihe mit nicht negativen Gliedern konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen nach oben beschränkt ist.
- *Leibnitz-Kriterium:* Eine alternierende Reihe (die Glieder haben ein abwechselndes Vorzeichen) konvergiert, wenn die Folge a_i eine monoton fallende Nullfolge ist.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$$

- *Quotientenkriterium:* Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1 \quad \text{und divergent, falls} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| > 1$$

Ist die Reihe absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent, die Umkehrung gilt nicht.

Beispiel 2.17 *Konvergiert die folgende Reihe, und wenn ja, gegen welchen Wert?*

$$s = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i$$

1. *Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{3}$*
2. *Quotientenkriterium anwenden:*

$$a_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k; \quad a_{k+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}}{\left(\frac{1}{3}\right)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \text{absolut konvergent}$$

Beispiel 2.18 *Im folgenden Fall ist keine Aussage über die Konvergenz möglich:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)}; \quad a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(k+1)(k+2)}}{\frac{1}{k(k+1)}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k(k+1)}{(k+1)(k+2)} = 1$$

Kapitel 3

Reelle Funktionen

Reelle Funktionen umfassen beispielsweise Geraden, Parabeln, aber auch durch Wertetabellen und Graphen gegebene Funktionen.

3.1 Polynome

Definition 3.1 Ein Polynom ist eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Form

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_ix^i$$

Ein Polynom mit $a_n \neq 0$ heißt Polynom vom Grad n . Die a_n heißen Koeffizienten.

3.1.1 Konstante und lineare Funktionen

Konstantes Polynom: $n = 0$: $p(x) = a_0$

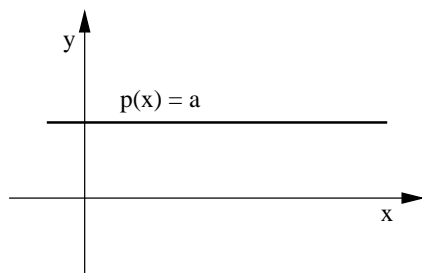


Abbildung 3.1: Konstantes Polynom

Lineares Polynom: $n = 1$: $p(x) = a_0 + a_1x$

Beispiel 3.1 Gegeben sind die Punkte $P_1 = (3, 10)$ und $P_2 = (5, 14)$ einer Geraden. Wie lautet die Funktionsgleichung?

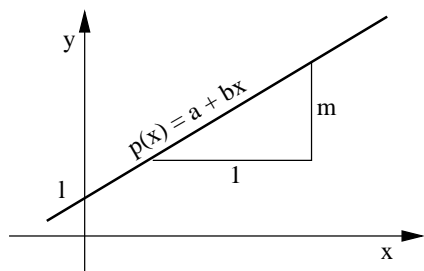


Abbildung 3.2: Lineares Polynom

•

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 14}{3 - 5} = 2$$

$$\underbrace{10}_y = \underbrace{2}_m \cdot \underbrace{3}_x + b \Rightarrow y = 2x + 4$$

•

$$\begin{aligned} 14 &= 5m + b \\ -(10 &= 3m + b) \\ 4 &= 2m \Rightarrow m = 2 \\ 10 &= 2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 4 \Rightarrow y = 2x + 4 \end{aligned}$$

3.1.2 Polynome höherer Ordnung

Satz 3.1 Besitzt das Polynom $p(x)$ vom Grad n an der Stelle x_1 eine Nullstelle, das heißt $p(x_1) = 0$, so läßt es sich in der Form $p(x) = (x - x_1)p_1(x)$ schreiben. Das Polynom p_1 hat den Grad $n - 1$. Der Faktor $(x - x_1)$ heißt Linearfaktor.

Beispiel 3.2 Parabel mit 2 Nullstellen x_1 und x_2 :

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Beispiel 3.3 Ähnlich auch bei Polynomen höherer Ordnung (Das konstante Glied ist das Produkt aller Nullstellen):

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

Lösung durch Raten, zum Beispiel Nullstelle $x_1 = 1$:

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6$$

Satz 3.2 Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n reelle Nullstellen. (Im Komplexen: genau n Nullstellen).

Satz 3.3 Besitzt ein Polynom n -ten Grades n Nullstellen x_1, x_2, \dots, x_n , dann folgt daraus:

$$p(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

Beispiel 3.4 Ein Polynom 3. Grades besitzt bei $x_1 = -5$ eine doppelte Nullstelle, bei $x_2 = -8$ eine einfache Nullstelle und schneidet die y -Achse bei 100. Wie lautet die Gleichung?

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x+5)^2(x+8) \\ p(0) &= 100 = a \cdot 5^2 \cdot 8 = 200a \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow p(x) &= \frac{1}{2}(x+5)^2(x+8) \end{aligned}$$

3.1.3 Horner Schema

Das Horner Schema dient zum Berechnen von Funktionswerten von Polynomen und zu einer einfacheren Polynomdivision.

$$\begin{aligned} p(x) &= \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ &= (\dots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \dots)x + a_0 \end{aligned}$$

Beispiel 3.5 $p(x) = 3x^5 - 4x^4 + 2x^2 - 7x - 16$

$$p(x) = (((((3x - 4)x + 0)x + 2)x - 7)x - 16$$

$x_0 = 2$	3	-4	0	2	-7	-16
	6	4	8	20	26	
	3	2	4	10	13	10

Beispiel 3.6 $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ durch $(x - x_0)$ teilen.

$$\frac{p(x)}{x - x_0} = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x - x_0} = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 + \frac{r(x)}{x - x_0}$$

bekannt: a_3, a_2, a_1, a_0
 unbekannt: b_2, b_1, b_0

Beispiel 3.7 $p(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6, x_0 = 2$

$x_0 = 2$	1	-5	5	5	-6	
	2	-6	-2	6		
$x_1 = 1$	1	-3	-1	3	0	$p(x) = (x-2)(x^3 - 3x^2 - x^2 + 3)$
	1	-2	-3	0		
$x_2 = 3$	1	-2	-3	0		$p(x) = (x-2)(x-1)(x^2 - 2x - 3)$
	3	3				
$x_3 = 1$	1	1	0			$p(x) = (x-2)(x-1)(x-3)(x+1)$
	-1					
	1	0				

Satz 3.4 Ist $p(x)$ ein Polynom n -ten Grades mit $n > 2, x_0 \in \mathbb{R}$ und definiert man b_k rekursiv durch

$$b_n = a_n, b_k = b_{k+1}x_0 + a_k; k = n - 1, \dots, 0$$

so gilt:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= b_0 \quad \text{„Auswertung“} \\ p(x) &= (x - x_0)(b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1) + p(x_0) \end{aligned}$$

Satz 3.5 Ein Polynom $p(z), z \in \mathbb{C}$ vom Grad $n \geq 1$ hat n komplexe Nullstellen.

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Die Nullstellen treten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

$$z_k = x_k + iy_k, \quad \bar{z}_k = x_k - iy_k$$

Die entsprechenden Linearfaktoren lassen sich reell zu den reell unzerlegbaren quadratischen Faktoren $((zyk)^2 + yk^2)$ zusammenfassen.

Beispiel 3.8 $p(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$; Nullstelle: $x_1 = 1$

$x_1 = 1$	1	-1	1	9	-10	$p(x) = (x^3 + x + 10)(x - 1)$
		1	0	1	10	
$x_2 = -2$	1	0	1	10	0	$p(x) = (x^2 - 2x + 5)(x - 1)(x + 2)$
		-2	4	-10		
	1	-2	5	0		

3.1.4 Polynominterpolation

Bestimme das Polynom $p(x)$, welches durch die $n + 1$ Punkte $(x_i, y_i), 0 \leq i \leq n$; $x_i \neq x_j; i \neq j$ geht. Der Grad von $p(x)$ ist höchstens n .

Satz 3.6 Zu $n + 1$ Stützstellen $(x_i, y_i); x_i \neq x_j; i \neq j$ gibt es genau ein Polynom p_n vom Grad $\leq n$ mit $p_n(x_i) = y_i; 0 \leq i \leq n$.

Beispiel 3.9 Gegeben sind die Punkte $(1, 1), (2, 4), (-2, 4)$. Gesucht ist das Polynom, das durch die gegebenen Punkte verläuft.

$$\begin{aligned} (1, 1) : 1 &= 1^2 a_2 + a_1 + a_0 \\ (2, 4) : 4 &= 2^2 a_2 + 2a_1 + a_0 \\ (-2, 4) : 4 &= (-2)^2 a_2 - 2a_1 + a_0 \end{aligned}$$

Analog findet man für $n + 1$ Punkte $(x_i, y) : 0 \leq i \leq n$ ein lineares Gleichungssystem mit $n + 1$ Gleichungen und $n + 1$ Variablen a_0, a_1, \dots, a_n . Das zugehörige Polynom lautet: $p(x) = a_n^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

Es entsteht ein lineares Gleichungssystem für a_1, a_2, a_3 . Ein großer Nachteil dieses Verfahrens ist ein erheblicher Rechenaufwand zur Lösung dieses Gleichungssystems. Für praktische Rechnungen verwendet man das Newton'sche Interpolationsverfahren.

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

Fordert man $p_n(x_i) = y_i$:

$$\begin{aligned} y_0 = p_n(x_0) &= a_0 \Rightarrow a_0 = y_0 \\ y_1 = p_n(x_1) &= a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \\ y_2 = p_n(x_2) &= a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

Am einfachsten findet man die Lösung mit folgendem Rechenschema:

x_i	y_i			
x_0	y_0			
		$[y_0, y_1]$		
x_1	y_1		$[y_0, y_1, y_2]$	
		$[y_1, y_2]$		$[y_0, y_1, y_2, y_3]$
x_2	y_2		$[y_1, y_2, y_3]$	$[y_0, y_1, y_2, y_3, y_4]$
		$[y_2, y_3]$		$[y_1, y_2, y_3, y_4]$
x_3	y_3		$[y_2, y_3, y_4]$	
		$[y_3, y_4]$		
x_4	y_4			

$$\begin{aligned} [y_i, y_{i+1}] &= \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \\ [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}] &= \frac{[y_{i+1}, y_i] - [y_{i+2}, y_{i+1}]}{[y_{i+1}, y_i] - [y_{i+2}, y_{i+1}]} \\ [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{i+k}] &= \frac{[y_{i+k}, \dots, y_{i+1}] - [y_{i+k-1}, \dots, y_i]}{[y_{i+k}, \dots, y_{i+1}] - [y_{i+k-1}, \dots, y_i]} \end{aligned}$$

Beispiel 3.10 Gegeben sind die Punkte $(0, -12), (2, 16), (5, 28), (7, -54)$.

x_i	y_i			
0	-12			
		$\frac{16 - (-12)}{2 - 0} = 14$		
2	16		$\frac{4 - 14}{5 - 0} = -2$	
		$\frac{28 - 16}{5 - 2} = 4$		$\frac{-9 - (-2)}{7 - 0} = -1$
5	28		$\frac{-41 - 4}{7 - 2} = -9$	
		$\frac{-54 - 28}{7 - 5} = -41$		
7	-54			

$$\begin{aligned} \Rightarrow p(x) &= -12 + 14(x - 0) - 2(x - 0)(x - 2) - 1(x - 0)(x - 2)(x - 5) \\ &= -12 + 14x - 2x(x - 2) - x(x - 2)(x - 5) \\ &= \underbrace{((-1) \cdot (x - 5))}_{a_3} \cdot \underbrace{(x - 2)}_{a_2} + \underbrace{14}_{a_1} \cdot \underbrace{x - 12}_{a_0} \end{aligned}$$

Allgemein:

$$\begin{aligned} [y_i] &= y_i \\ [y_i, \dots, y_{i+k}] &= \frac{[y_i, \dots, y_{i+k-1}] - [y_{i+1}, \dots, y_{i+k}]}{x_i - x_{i+k}} \\ \Rightarrow p_n(x) &= \sum_{i=0}^n [y_0, \dots, y_i] (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \end{aligned}$$

3.1.5 Binomialkoeffizienten und der binomische Lehrsatz

Es geht vor allem um eine Verallgemeinerung der binomischen Formeln.

Die Fakultät

Beispiel 3.11 Anzahl der Möglichen Permutationen einer n -elementigen Menge $M = \{a, b, c\}$: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ (6 Permutationen).

Allgemein: bei n Elementen: n Möglichkeiten, die erste Stelle zu besetzen, $n-1$ Möglichkeiten für die zweite Stelle, \dots und eine Möglichkeit für die letzte Stelle. Insgesamt ergeben sich $n!$ Möglichkeiten.

$$\begin{aligned} n! &:= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 0! &:= 1 \end{aligned}$$

Binomialkoeffizienten

Man benötigt Binomialkoeffizienten (man spricht: " n über k " mit $n, k \in \mathbb{N}$) vor allem in der Kombinatorik und im Zusammenhang mit binomischen Formeln.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &:= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{k(k-1)(k-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (n-k)(n-k-1)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

Satz 3.7 Eine Menge mit n Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene, k -elementige Teilmengen.

Rechenregeln

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= 1 \\ \binom{n+1}{k} &= \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \end{aligned}$$

Beispiel 3.12 Im Lotto "6 aus 49" gibt es 13.983.816 Möglichkeiten, 6 Richtige zu ziehen:

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

Zur Berechnung kleinerer Werte von Binomialkoeffizienten kann das Pascal-Dreieck verwendet werden. Die Lösung für den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ steht in Zeile $n + 1$ an der Stelle $k + 1$. Ein kleines Beispiel: $\binom{6}{4} = 15$

				1				
				1	1			
			1	2	1			
		1	3	3	1			
	1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		

Der binomische Lehrsatz

Satz 3.8

$$(a+b)^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Beispiel 3.13 Beispiele zum binomischen Lehrsatz:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0} a^2 + \binom{2}{1} ab + \binom{2}{2} b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

Merkregel

- Die Koeffizienten von $(a+b)^n$ findet man in der $(n+1)$ ten Zeile des Pascal-Diagrammes.
- Die Exponenten von a werden von Summand zu Summand um eins kleiner, die von b wachsen um eins, die Summe ist immer n .
- Bei $(a-b)^n$ wechselt das Vorzeichen.

3.2 Die Betragsfunktion

Eigenschaften der Betragsfunktion

- achsensymmetrisch zur y-Achse
- nicht differenzierbar

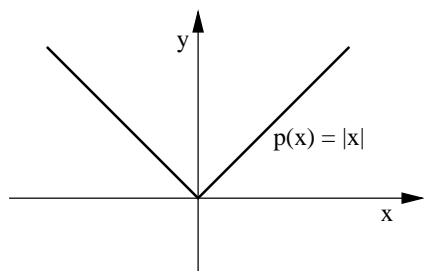


Abbildung 3.3: Betragsfunktion

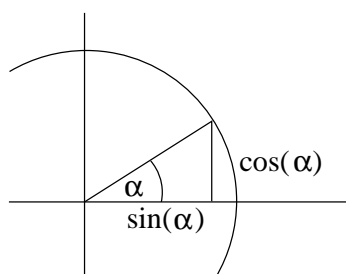


Abbildung 3.4: Trigonometrische Funktionen

3.3 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen werden aus den Seitenverhältnissen im rechtwinkligen Dreieck abgeleitet.

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \\ \tan(\alpha) &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ \cot(\alpha) &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\tan(\alpha)}\end{aligned}$$

Umrechnung zwischen Winkel- und Bogenmaß (α : Winkel in Grad, x : Winkel im Bogenmaß):

$$\alpha = \frac{180}{\pi}x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{180}\alpha$$

3.3.1 Sinus und Cosinus

Eigenschaften:

- Periodische Funktionen (mit Periode 2π):

$$- \sin(x) = \sin(x + 2\pi k); k \in \mathbb{Z}$$

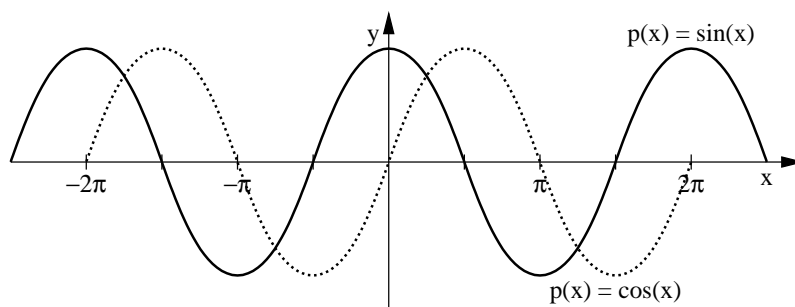


Abbildung 3.5: Sinus- und Cosinus Funktionen

$$- \cos(x) = \cos(x + 2\pi k); k \in \mathbb{Z}$$

- Symmetrie:

- Der Sinus ist punktsymmetrisch zum Ursprung (man spricht von einer *ungeraden* Funktion): $\sin(-x) = -\sin(x)$
- Der Cosinus ist achsensymmetrisch zur y-Achse (eine *gerade* Funktion): $\cos(-x) = \cos(x)$

- Nullstellen:

- $\sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; k \in \mathbb{Z}$
- $\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2}\pi; k \in \mathbb{Z}$

- $|\sin(x)| \leq 1; |\cos(x)| \leq 1$

- Pythagoras im Einheitskreis: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = \pm\sqrt{1 - \cos^2(x)}$

- Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(x) \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin(x) \\ \sin(\pi - x) &= \sin(x) = -\sin(-x) = -\sin(\pi) \\ \cos(x + \pi) &= -\cos(x) \\ \sin(2\pi - x) &= \sin(-x) \\ \cos(2\pi - x) &= \cos(x) \end{aligned}$$

- Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y) \end{aligned}$$

insbesondere:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= \sin(x) \cos(x) + \cos(x) \sin(x) \\ &= 2 \sin(x) \cos(x) \\ \cos(2x) &= \cos^2(x) - \sin^2(x) \\ &= \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) \\ &= 2 \cos^2(x) - 1 \end{aligned}$$

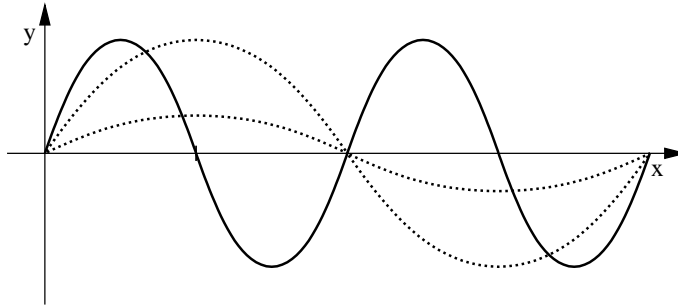


Abbildung 3.6: Amplitude, Frequenz und Verschiebung

- Frequenz f , d.h. Schwingungsdauer: $T = \frac{1}{f} \Rightarrow \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$
- $a \sin(x) + b \cos(x) = A \sin(x + \varphi) = A(\sin(x) \cos(\varphi) + \cos(x) \sin(\varphi))$
- Koeffizientenvergleich :

$$a = A \cos(\varphi)$$

$$b = A \sin(\varphi)$$

Quadrieren und Addieren:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= A^2 \cos^2(\varphi) + A^2 \sin^2(\varphi) = A^2 \cdot 1 \\ &\Rightarrow A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \varphi &= \frac{A \sin \varphi}{A \cos \varphi} = \frac{b}{a} \end{aligned}$$

3.3.2 Tangens und Cotangens

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \cot(x) &= \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)} \end{aligned}$$

Eigenschaften der (Co-)Tangens-Funktion

- Periode π .
- ungerade Funktionen
- $\tan(x) \cdot \cot(x) = 1$
-

$$\begin{aligned} \tan(x + y) &= \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} \\ &= \frac{\sin(x) \cos(y) + \sin(y) \cos(x)}{\cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y)} \end{aligned}$$

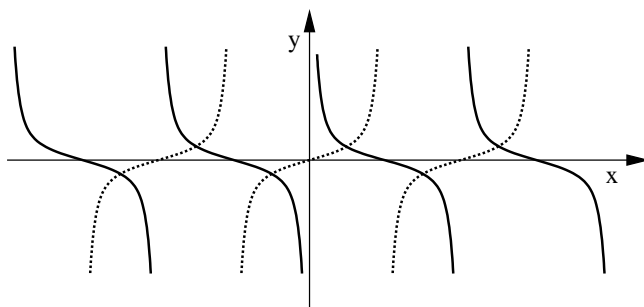


Abbildung 3.7: Tangens und Cotangens Funktionen

$$\begin{aligned}
 \cot(x+y) &= \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)} + \frac{\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} \\
 &= \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} \\
 \cot(x+y) &= \frac{\cot(x)\cot(y) - 1}{\cot(x) + \cot(y)}
 \end{aligned}$$

3.3.3 Umrechnungsregeln

Die folgende Tabelle gilt nur für Umrechnungen innerhalb des ersten Quadranten. Für die restlichen Quadranten müssen die Vorzeichen entsprechend geändert werden.

$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\cot(x)$
$\sin(x)$	$\sin(x)$	$\sqrt{1 - \cos^2(x)}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
$\cos(x)$	$\sqrt{1 - \sin^2(x)}$	$\cos(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\frac{\cot(x)}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
$\tan(x)$	$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\cos(x)}$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cot(x)}$
$\cot(x)$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2(x)}}{\sin(x)}$	$\frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$\cot(x)$

3.3.4 Lösungen goniometrischer Gleichungen

Beispiel 3.14 *Wie lauten die Lösungen der folgenden Gleichung?*

$$\begin{aligned}
 \sin(2x) &= 1.5 \cos(x) \\
 \Leftrightarrow 2 \sin(x) \cos(x) &= 1.5 \cos(x) \\
 \Leftrightarrow \cos(x) \cdot (2 \sin(x) - 1.5) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \vee \sin(x) &= \frac{3}{4} \\
 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \vee x_2 &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \\
 \vee x_3 = \arcsin(x) \vee x_4 &= \pi - \arcsin(x)
 \end{aligned}$$

Beispiel 3.15 *Man bestimme alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) + \cos(x) - 1.2 = 0$. Wir hatten: $a \sin(x) + b \cos(x) = A \sin(x + \varphi)$. Hier: $a = 1, b = 1 \Rightarrow$*

$A = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}$. Man kann also schreiben:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1.2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1.2}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow x_1 &= \arcsin\left(\frac{1.2}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ \vee x_2 &= \arcsin\left(\frac{1.2}{\sqrt{2}}\right) + 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Beispiel 3.16 Man bestimme die Werte von $0 \leq x \leq \pi$ für die gilt: $3 \sin(x) + 5 \cos(x) - 4 = 0$. Das läßt sich entweder analog zum Beispiel oben oder auch wie folgt lösen (unter Zuhilfenahme der Umrechnungstabelle, indem man sich der Formel $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ bedient):

$$\begin{aligned} 3\sqrt{1 - \cos^2(x)} + 5 \cos(x) - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{1 - \cos^2(x)} &= 4 - 5 \cos(x) \\ \Rightarrow 9(1 - \cos^2(x)) &= 16 - 40 \cos(x) + 25 \cos^2(x) \\ \Leftrightarrow 34 \cos^2(x) - 40 \cos(x) + 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= \frac{10}{17} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{17}\right)^2 - \frac{7}{34}} \end{aligned}$$

Insgesamt ergeben sich 4 Lösungen:

$$\begin{aligned} \cos(x) = 0.962\dots &\Rightarrow x_1 = 0.274\dots, x_2 = \pi - 0.274\dots = 6.009\dots \\ \cos(x) = 0.214\dots &\Rightarrow x_3 = 1.355\dots, x_4 = \pi - 1.355\dots = 4.928\dots \end{aligned}$$

Da das Quadrieren jedoch keine Äquivalenumformung darstellt, wird eine Probe notwendig. Es stellt sich heraus, das lediglich $x_2 = 6.009\dots$ und $x_3 = 1.335\dots$ Lösungen sind.

3.4 Wurzel-, Exponential- und Logarithmusfunktion

3.4.1 Die Wurzelfunktion

$$\sqrt[n]{a} = x \Rightarrow x^n = a, \quad a \geq 0$$

Beispiel 3.17 BEISPIELE FEHLEN

Rechenregeln

- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^n = a$
- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
- $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

3.4.2 Die Exponentialfunktion

Definition 3.2 Für alle $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$ heißt $f(x) = a^x$ allgemeine Exponentialfunktion.

$$f(x) = a^x, a > 0$$

Die Exponentialfunktion mit der eulerschen Zahl e als Basis ist *die* Exponentialfunktion schlechthin.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828\dots$$

Eigenschaften

- Alle Kurven Verlaufen durch den Punkt $(0, 1)$.
- Die Exponentialfunktion besitzt keine Nullstellen.
- Sie ist durchgehend definiert ($D = \mathbb{R}$).
- Für alle $a \neq 0$ verläuft sie streng monoton. Sie steigt streng monoton, falls $a > 1$ und fällt streng monoton im Falle $a < 1$.

3.4.3 Die Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ ist für alle $a \neq 1$ eine streng monotone Funktion und damit umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt *Logarithmusfunktion*. Sie ist wie folgt definiert:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y)$$

Die Logarithmusfunktion beantwortet die Frage: "Mit welcher Zahl muß ich a potenzieren, damit y herauskommt?"

Rechenregeln

- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c)$
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a(b) - \log_a(c)$
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a(b)$
- $\log_a(a^c) = c$
- $a^{\log_a(c)} = c$

Zusammenhang zwischen allgemeinem Logarithmus und dem *Logarithmus Naturalis*:

$$\log_a(x) = \frac{\log_n(x)}{\log_n(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Zusammenhang zwischen Logarithmus Naturalis und Exponentialfunktion:

$$a^x = \left(e^{\ln(a)}\right)^x = e^{x \ln(a)}$$

Beispiel 3.18 Beispiele zur Logarithmusfunktion:

$$\begin{aligned}\log(ab)^3 &= 3(\log(a) + \log(b)) \\ \log(\sqrt[3]{a^2b^4}) &= \frac{1}{3}(2\log|a| + 4\log|b|) \\ \log(u+v) + \log(u-v) &= \log(u^2 - v^2) \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(xy) - 3\log(x-y) &= \log\left(\frac{\frac{x}{y}xy}{(x-y)^3}\right) = \log\left(\frac{x^2}{(x-y)^3}\right)\end{aligned}$$

3.4.4 Lösung von Exponential- und Logarithmusgleichungen

Beispiel 3.19

$$\begin{aligned}e^{\cos(x)} &= 1 \\ \Leftrightarrow \ln(e^{\cos(x)}) &= \ln(1) \\ \Leftrightarrow \cos(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Beispiel 3.20 $2^x + 4 \cdot 2^{-x} - 5 = 0$

Substituiere: $z = 2^x \Rightarrow 2^{-x} = \frac{1}{z}$

$$\begin{aligned}z + \frac{4}{z} - 5 &= 0 \\ \Rightarrow z^2 + 4 - 5z &= 0 \\ \Leftrightarrow z &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow z = 4 \quad \vee \quad z = 1\end{aligned}$$

Resubstituiere: $z = 2^x$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2^x = 4 \quad \vee \quad 2^x = 1 \\ \Leftrightarrow x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 0\end{aligned}$$

3.5 Eigenschaften von Funktionen

Definition 3.3 D und B seien Mengen. Eine Funktion (Abbildung) $f : D \Rightarrow B$ ist definiert durch:

- Definitionsbereich D
- Bildbereich B
- Zuordnungsvorschrift, die jedem $x \in D$ eindeutig ein $y \in B$ zuordnet. Man schreibt: $y = f(x)$.

3.5.1 Monotonie

Definition 3.4 Eine Funktion $f : x \Rightarrow \mathbb{R}$ heißt für alle $x_1, x_2 \in D : x_1 < x_2$

- monoton wachsend: $\Leftrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- streng monoton wachsend: $\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- monoton fallend: $\Leftrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
- streng monoton fallend: $\Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

3.5.2 Symmetrie

Definition 3.5 Eine Funktion heißt

- gerade: $\forall x \in D : f(x) = f(-x)$
- ungerade: $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$

Beispiel 3.21 Einige gerade Funktionen: $x^4 + x^2$, $|x|$, $\cos(x)$, \dots

Beispiel 3.22 Zeigen sie, daß die folgende Funktion gerade ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin^2(x) - \cos(x)}{1 + x^2} \\ f(-x) &= \frac{\sin^2(-x) - \cos(-x)}{1 + (-x)^2} \\ &= \frac{(-\sin(x))^2 - \cos(x)}{1 + x^2} \\ &= \frac{\sin^2(x) - \cos(x)}{1 + x^2} \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Satz 3.9 Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur Y-Achse. Der Graph einer ungeraden Funktion ist spiegelsymmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$.

3.5.3 Periodizität

Definition 3.6 Eine Funktion f heißt periodisch auf D , wenn es ein $p > 0$ gibt, mit $f(x + p) = f(x) \forall x \in D$.

Die Sinus-, Cosinus- und Tangens-Funktionen oder etwa Sägezahnkurven sind prominente Beispiele für periodische Funktionen.

3.5.4 Grenzwerte

Definition 3.7 (Grenzwert) Eine Funktion $f(x)$ hat für $x \rightarrow a$ den

- rechtsseitigen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$, wenn für jede Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow a, x_1 > a \forall n$ die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen c strebt.
- linksseitigen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$, wenn für jede Zahlenfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \rightarrow a, x_1 < a \forall n$ die Zahlenfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen c strebt.
- Grenzwert $c, \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, wenn gilt $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = c$

Definition 3.8 (Asymptote)

- Die Gerade $x = a$ heißt vertikale Asymptote, wenn $\lim_{x \rightarrow a^\pm} = \pm\infty$
- Die Gerade $y = c$ heißt horizontale Asymptote, wenn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$ oder $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = c$
- Die Gerade $y = px + q$ heißt schräge Asymptote, wenn $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (px + q) = 0$

3.5.5 Stetigkeit

Definition 3.9 (*Stetigkeit*) Eine Funktion $f(x)$ heißt stetig in x_0 , wenn gilt:

$$\underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)}_{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

Sie heißt stetig in einem Intervall I , wenn sie für alle $x \in I$ stetig ist.

Stetig heißt anschaulich: "Zeichnen ohne abzusetzen."

Beispiel 3.23 Sinus, Cosinus, Polynome, e -Funktion (e^x) sind alle stetig. Gebrochen Rationale Funktionen sind in den Nullstellen des Nenners nicht stetig.

Die Vorzeichenfunktion ist unstetig in 0:

$$y = \begin{cases} 1 & : x > 0 \\ 0 & : x = 0 \\ -1 & : x < 0 \end{cases}$$

Satz 3.10 Für jede auf einem abgeschlossenem Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f gilt:

Schranksatz Es gibt eine Schranke $k: |f(x)| \leq k \forall x \in [a, b]$. Man sagt auch: f ist auf $[a, b]$ beschränkt.

Satz vom Minimum und vom Maximum Es gibt stets Werte $x_0, x_1 \in [a, b]$, so daß $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1) \forall x \in [a, b]$. f nimmt auf $[a, b]$ Minimum und Maximum an.

Zwischenwertsatz Zu jeder Zahl c zwischen dem Minimum $f(x_0)$ und dem Maximum $f(x_1)$ mit $f(x_0) < c < f(x_1)$ gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$. Das heißt, jeder Wert zwischen Minimum und Maximum wird angenommen.

Folgerungen

- Jedes Polynom ungeraden Grades hat in R mindestens eine Nullstelle.
- $f: [a, b] \rightarrow R$ stetig. Haben $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen ($f(a)f(b) < 0$), dann gibt es mindestens eine Nullstelle x in $[a, b]$.

Bisektionsverfahren

Ziel des Bisektionsverfahrens ist die näherungsweise Bestimmung einer Nullstelle einer beliebigen stetigen Funktion. Im Intervall $[a, c]$, in dem die Funktion das Vorzeichen wechselt, wählt man einen Punkt $b = \frac{a+c}{2}$. Ist $f(a)f(b) < 0$, wiederholt man das Verfahren mit dem Intervall $[a, b]$, andernfalls, wenn $f(a)f(b) > 0$, fährt man mit dem Intervall $[b, c]$ fort.

Beispiel 3.24 $f(x) = x^4 + 2x^3 - 28x^2 + 2x + 1$

Mitte	$f(x)$	Intervall
0	1	\longrightarrow
1	-92	\longrightarrow
$\frac{1}{2}$	-22.19	$\longrightarrow [0, \frac{1}{2}]$
$\frac{1}{4}$	-4.9	$\longrightarrow [0, \frac{1}{4}]$
$\frac{1}{8}$	-0.277	$\longrightarrow [0, \frac{1}{8}]$
$\frac{1}{16}$	0.74	$\longrightarrow [\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$

3.5.6 Umkehrfunktion

Definition 3.10 Eine Funktion $f : D \rightarrow W = f(D)$ heißt umkehrbar, wenn zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ existiert, mit $y = f(x)$.

Die Funktion, die den $y \in W$ die $x \in D$ zuordnet, heißt Umkehrfunktion, $f^{-1}(y)$.

Vorsicht! niemals folgendes verwechseln: $f^{-1}(x) \neq f(x)^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

Man erhält die Umkehrfunktion einer Funktion $f(x)$, indem man die Funktionsgleichung nach x auflöst. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(y)) &= y & \forall y \in W \\ f^{-1}(f(x)) &= x & \forall x \in D \end{aligned}$$

Beispiel 3.25 $y = ax + b = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y-b}{a} = f^{-1}(y)$

$y = x^2$ ist über R nicht umkehrbar, da x zwei Lösungen hat: $x = \pm\sqrt{y}$

$f(x) = 2^x \Leftrightarrow x = \ln(y) = f^{-1}(y)$

Satz 3.11 (Umkehrbarkeit von Funktionen)

- Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar. (Aber Vorsicht! Aus Umkehrbarkeit folgt nicht strenge Monotonie.)
- Ist f über D umkehrbar mit der Umkehrfunktion f^{-1} , dann liegen die Graphen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ symmetrisch zur Winkelhalbierenden $y = x$.

Arcus Funktionen

Trigonometrische Funktionen sind im Allgemeinen nicht umkehrbar, außer man beschränkt sich auf Teilintervalle strenger Monotonie.

Ausgangsfunktion	$y = \sin(x)$	$y = \cos(x)$	$y = \tan(x)$	$y = \cot(x)$
D_f	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$[0; \pi]$
W_f	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
Umkehrfunktion	$y = \arcsin(x)$	$y = \arccos(x)$	$y = \arctan(x)$	$y = \text{arccot}(x)$
$D_{f^{-1}}$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	R	R
$W_{f^{-1}}$	$[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$	$[0; \pi]$	$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$	$[0; \pi]$
Monotonie	wachsend	fallend	wachsend	fallend
Symmetrie	ungerade	gerade	ungerade	ungerade

Hyperbol Funktionen

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ \tanh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\end{aligned}$$

Die Hyperbol Funktionen scheinen auf den ersten Blick nicht mit den bekannten trigonometrischen Funktionen zusammenzuhängen. Dieser Zusammenhang zeigt sich erst im Zusammenhang mit den komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned}\sinh(iz) &= \sin(z) \\ \cosh(iz) &= \cos(z)\end{aligned}$$

Praktische Bedeutung

Der Cosinus Hyperbolicus bildet die sogenannte *Kettenlinie*. Wird ein Seil oder eine Kette an zwei gleich hohen Punkten P_1 und P_2 aufgehängt. Man wählt das Koordinatensystem so, daß der tiefste Punkt gleich $(0, a)$ ist.

$$a := \frac{\text{Horizontale Komponente der Zugkraft}}{\text{Seilgewicht pro Längeneinheit}}$$

Die Kettenlinie wird beschrieben durch den Graphen der Funktion $y = f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

Rechenregeln

- Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sinh(x + y) &= \sinh(x) \cosh(y) + \sinh(y) \cosh(x) \\ \cosh(x + y) &= \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)\end{aligned}$$

- $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
- Symmetrie: $\cosh(x)$ ist eine gerade und $\sinh(x)$ eine ungerade Funktion.

Die Areafunktionen

Die Areafunktionen stellen die Umkehrfunktionen zu den Hyperbol Funktionen $\cosh(x)$ auf dem Intervall $[1, \infty[\rightarrow R_+$ beziehungsweise $\sinh(x) R \rightarrow R$ dar. Sie können durch den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\operatorname{ar} \sinh(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \\ \operatorname{ar} \tanh(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right) \\ \operatorname{ar} \coth(x) &= \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\end{aligned}$$

Kapitel 4

Differentiation

4.1 Ableitung

Die Sekante ist die Gerade, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ verläuft. Die Steigung der Sekante berechnet sich wie folgt:

$$\frac{\Delta f}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Bildet man den Grenzwert der Sekantensteigung, erhält man eine Tangente. Die Steigung der Tangente am Punkt x_0 ist:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}_{\text{Differenzquotient}}$$

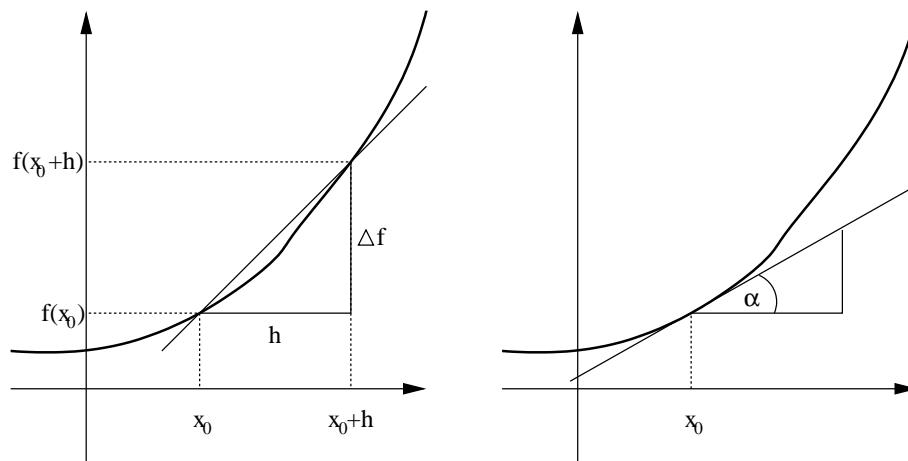


Abbildung 4.1: Sekante und Tangente

Definition 4.1 f sei auf dem ganzen Intervall I definiert und $x_0 \in I$. f heißt differenzierbar in x_0 , wenn der Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ existiert.

Die Tangentengleichung $t(x)$ an der Stelle $x = x_0$ wird folgendermassen ermittelt:

$$\begin{aligned} g(x) &= f'(x_0) \cdot x + b && \text{Allgemeine Geradengleichung} \\ f(x_0) &= f'(x_0) \cdot x_0 + b \Leftrightarrow b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ \Rightarrow g(x) &= f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\ &= f'(x - x_0) + f(x_0) \end{aligned}$$

In der praktischen Anwendung wird eine Funktion oft durch ihre Tangenten angenähert, wodurch die weiteren Berechnungen immens vereinfacht werden. Man nennt dieses Vorgehen *Linearisierung*.

Beispiel 4.1 BEISPIELE FEHLEN

Physikalische Anwendung von Ableitungen

- Geschwindigkeit¹: $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \dot{s}$
- Beschleunigung²: $a = \dot{v} = \ddot{s}$
- Leistung als Arbeit durch Zeit: $P = \frac{\Delta w}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \dot{w}$

Satz 4.1 *Jede differenzierbare Funktion ist stetig.*

Vorsicht! Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht. Man kann sich die Stetigkeit einer Funktion so vorstellen, daß diese mit einer durchgehenden Linie dargestellt werden kann und die Differenzierbarkeit so, daß der Graph keine Knicke aufweist.

4.1.1 Rechenregeln

Grundfunktionen

- $c \longrightarrow 0$
- $x^a \longrightarrow ax^{a-1}$
- $\sqrt{x} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- $\ln(x) \longrightarrow \frac{1}{x}$
- $e^x \longrightarrow e^x$

Trigonometrische Funktionen

- $\sin(x) \longrightarrow \cos(x)$
- $\cos(x) \longrightarrow -\sin(x)$
- $\tan(x) \longrightarrow \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\cot(x) \longrightarrow -\frac{1}{\sin^2(x)}$

¹engl.: velocity

²engl.: acceleration

Differentiationsregeln**Additionsregel**

$$f(x) + g(x) \longrightarrow f'(x) + g'(x)$$

Konstanter Faktor

$$c \cdot f(x) \longrightarrow c \cdot f'(x)$$

Polynom

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i \longrightarrow \sum_{i=1}^n i a_i x^{i-1}$$

Produktregel

$$f(x) \cdot g(x) \longrightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Quotientenregel

$$\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Kettenregel

$$f(g(x)) \longrightarrow f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Beispiel 4.2

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ f'(x) &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

Beispiel 4.3

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+3)^5 \cos(7x) \\ f'(x) &= 5(x+3)^4 \cos(7x) + (x+3)^5 (-\sin(x) \cdot 7) = (x+3)^4 (5 \cos(7x) + (x+3)(-7 \sin(7x))) \end{aligned}$$

Beispiel 4.4

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 + 6x + 5)^3 \\ f'(x) &= 3(x^4 + 6x + 5)^2 \cdot (4x^3 + 6) \end{aligned}$$

Beispiel 4.5

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(\sin(x^2)) \\ f'(x) &= \frac{1}{\sin(x^2)} \cdot \cos(x^2) \cdot 2x = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2)} \end{aligned}$$

Beispiel 4.6

$$\begin{aligned} f(x) &= a^x = (e^{\ln(a)})^x = e^{x \ln(a)} \\ f'(x) &= e^{x \ln(a)} \cdot \ln(a) = a^x \ln(a) \end{aligned}$$

4.1.2 Höhere Ableitungen

Unter einer höheren Ableitung versteht man die Ableitung einer Ableitung, die Ableitung einer Ableitung einer Ableitung und so weiter.

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$$

4.1.3 Implizite Differentiation

Vorgehensweise bei impliziter Differentiation:

- $f(x, y(x)) = 0$ wird nach x abgeleitet, dabei faßt man $y(x)$ als Funktion von x auf. Kettenregel zu beachten!
- Auflösen nach $y' = y'(x, y)$
- Die Steigung erhält man durch Einsetzen der Koordinaten.

Beispiel 4.7 Gegeben: Kreis mit Radius 2 um den Mittelpunkt $(0, 0)$
 Gesucht: Steigung der Tangente im Punkt $(1, \sqrt{3})$ ³

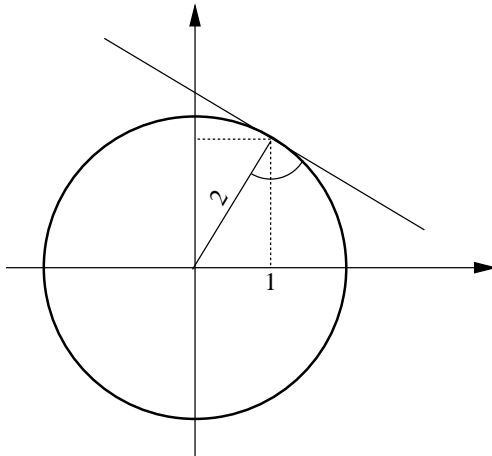


Abbildung 4.2: Implizite Differentiation

1. Möglichkeit: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$. hier:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{4-x^2} \\ \Rightarrow y'(x) &= \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ \Rightarrow y'(1) &= \frac{-1}{\sqrt{4-1}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: implizite Differentiation; y ist Funktion von x :

$$\begin{aligned} x^2 + (y(x))^2 &= 4 \\ \Rightarrow 2x + 2y(x) \cdot y'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{-x}{y(x)} \\ \Rightarrow y'(1) &= \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

³Allgemeine Kreisgleichung für einen Kreis um den Mittelpunkt (m_1, m_2) mit Radius r :
 $(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2$

Beispiel 4.8 Gegeben: $x^3 + \ln(y) - x^2 e^y = 0$

Gesucht: Tangentensteigung im Punkt $(e, 1)$

$(e, 1)$ ist Punkt der Kurve, denn: $e^3 + \ln(1) - e^2 e^1 = 0$

$$\begin{aligned} x^3 + \ln(y(x)) - x^2 e^{y(x)} &= 0 \\ \Rightarrow 3x^2 + \frac{y(x)}{y'(x)} - 2x e^{y(x)} - x^2 e^{y(x)} \cdot y'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow y'(x) \left(\frac{1}{y(x)} - x^2 e^{y(x)} \right) &= 2x e^{y(x)} - 3x^2 \\ \Leftrightarrow y'(x) &= \frac{2x e^{y(x)} - 3x^2}{\frac{1}{y(x)} - x^2 e^{y(x)}} \\ \Rightarrow y'(e) &= \frac{2e e^1 - 3e^2}{\frac{1}{1} - e^2 e^1} = -\frac{e^2}{1 - e^3} \end{aligned}$$

Spezialfall: Ableitung der Umkehrfunktion

Satz 4.2

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Beweis: Wir hatten: $f(f^{-1}(y)) = y \stackrel{\frac{d}{dy}}{\Rightarrow} f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1 \Leftrightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Beispiel 4.9 BEISPIEL FEHLT

4.2 Anwendungen der Differentiation

4.2.1 Maxima und Minima

Definition 4.2 Eine Funktion f hat ein globales Minimum (Maximum) im Punkt $a \in D$, wenn für alle $x \in D$ gilt: $f(a) \leq f(x)$ ($f(a) \geq f(x)$).

$b \in D$ heißt lokales Minimum (Maximum), wenn es ein Intervall I mit Mittelpunkt b gibt, so daß für alle $x \in I$ gilt: $f(b) \leq f(x)$ ($f(b) \geq f(x)$).

Satz 4.3 Ist f eine auf dem offenen Intervall I differenzierbare Funktion, so gilt: x_0 ist lokales Extremum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$. Die Umkehrung gilt nicht! (zum Beispiel $f(x) = x^3$).

Kandidaten für Extrempunkte sind:

- Punkte mit $f'(x) = 0$
- Randpunkte
- Punkte aus I , in denen f nicht differenzierbar ist

Beispiel 4.10 Aus einer rechteckigen Blechplatte der Seitenlängen 16 cm und 10 cm soll eine quaderförmige, offene Wanne geschnitten werden. Diese Wanne soll ein maximales Volumen besitzen.

$$\begin{aligned} V(x) &= (16 - 2x)(10 - 2x)x = x^3 - 52x^2 + 160 \\ V'(x) &= 12x^2 - 104x + 160 \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - \frac{26}{3}x + \frac{40}{3} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{13}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} - \frac{40}{3}} = \frac{13}{3} \pm \frac{7}{3} = 6\frac{2}{3} \vee 2 \end{aligned}$$

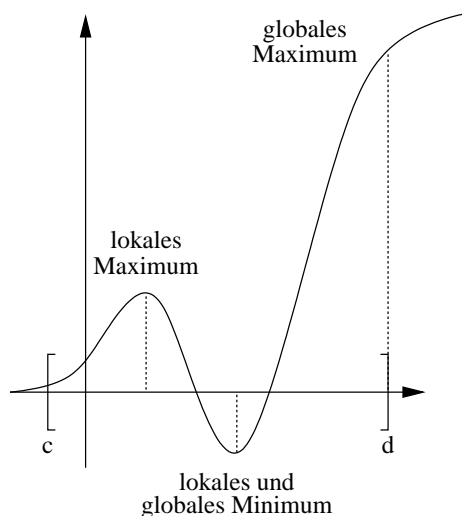


Abbildung 4.3: Globale und lokale Maxima und Minima

4.2.2 Mittelwertsatz

Satz 4.4 (Mittelwertsatz) f sei in $[a, b]$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar. Dann gibt es mindestens einen Punkte $x_0 \in]a, b[$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}; \quad x_0 \in]a, b[$$

Folgerung 4.1 f sei auf dem Intervall I differenzierbar. Dann gilt:

- $f'(x) > 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf I .
- $f'(x) < 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist streng monoton fallend auf I .
- $f'(x) \geq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf I .
- $f'(x) \leq 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist monoton fallend auf I .
- $f'(x) = 0$ auf $I \Rightarrow f$ ist konstant wachsend auf I : $f(x) = c$.

Satz 4.5 f sei auf dem Intervall $]a, b[$ differenzierbar und $f'(x_0)$ sei 0 (das bedeutet, x_0 ist stationärer Punkt). f hat in x_0 ein lokales Minimum (Maximum), wenn die Ableitung unmittelbar links von x_0 negativ (positiv) und rechts von x_0 positiv (negativ) ist.

Satz 4.6 f sei auf dem Intervall $]a, b[$ zweimal stetig differenzierbar und $f'(x_0)$ sei 0. Dann gilt:

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein Minimum.
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ hat in x_0 ein Maximum.

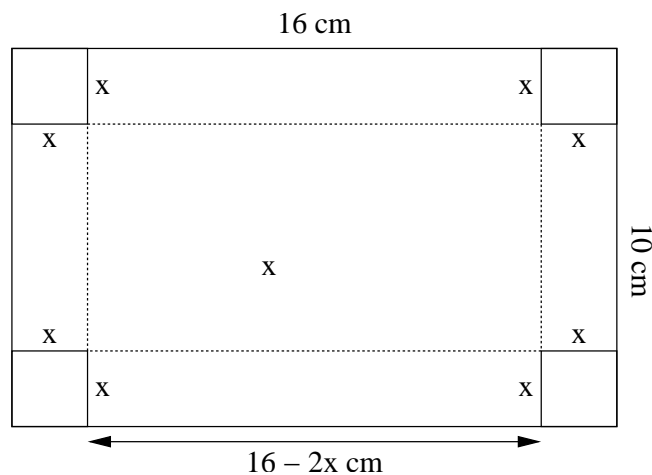


Abbildung 4.4: Abmessungen der Wanne

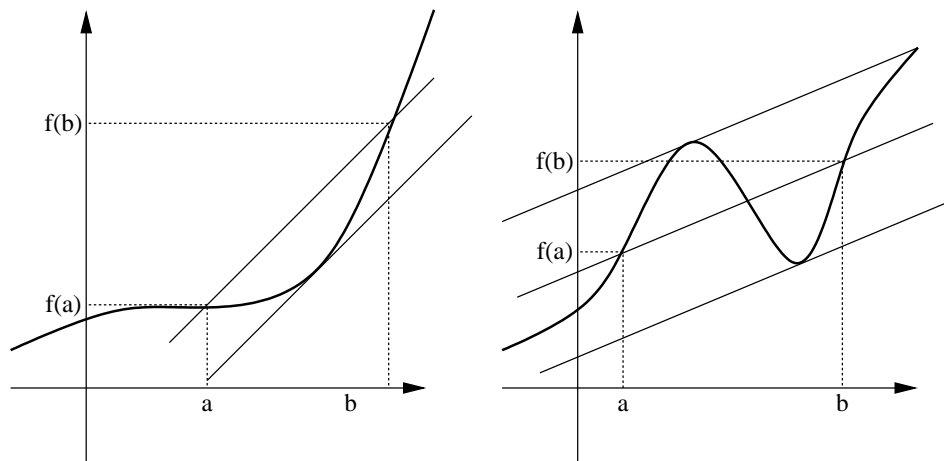


Abbildung 4.5: Mittelwertsatz

4.2.3 Wendepunkte

Die zweite Ableitung einer Funktion beschreibt das Krümmungsverhalten der Funktion. Punkte, an denen sich das Krümmungsverhalten ändert, heißen *Wendepunkte*.

Satz 4.7 (*Krümmung*)

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist rechtgekrümmt (konvex von oben).
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist linksgekrümmt (konvex von unten).

Kandidaten für Wendepunkte sind:

- Punkte mit $f''(x) = 0$
- Punkte, an denen $f''(x)$ nicht existiert

Satz 4.8 Eine Funktion f hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn gilt:

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

4.2.4 Die Regel von l'Hopital

Die Regeln von l'Hopital dienen zur Bestimmung schwierig zu berechnender Grenzwerte.

Satz 4.9 Es gelte:

- $(f(x) \rightarrow 0 \text{ und } g(x) \rightarrow 0) \text{ oder } (f(x) \rightarrow \infty \text{ und } g(x) \rightarrow \infty)$
- $\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

Dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beispiel 4.11 BEISPIELE FEHLEN

4.2.5 Kurvendiskussion

In der Vorlesung wurde ein Beiblatt mit einem detaillierten Beispiel ausgeteilt. Hier noch einmal die Zusammenfassung dessen, welche Schritte notwendig sind:

- Definitions- und Wertebereich festlegen
- Symmetrie feststellen : f gerade, ungerade oder keines von beidem
- Auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit testen
- Nullstellen bestimmen, Vorzeichenbereiche festlegen
- Extremwerte und Monotoniebereiche bestimmen
- Wendepunkte und Konvexitätsbereiche feststellen
- Asymptoten und Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ und kritische Stellen finden
- Skizze anfertigen

4.3 Das Newton-Verfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen

Einige wichtige Gleichungen (zum Beispiel $e^x - x = 0$) lassen sich nicht ohne weiteres per Hand lösen, in der technischen Anwendung genügt jedoch oftmals eine Näherungslösung. Bisher hatten wir dazu in Abschnitt 3.5.5 (Seite 29) dazu das Bisektionsverfahren kennengelernt, welches jedoch nicht besonders effizient und zu "eindimensional" ist.

Idee

- Beginne mit Startwert $x_0 : x_1$
- Bestimme Nullstelle der Tangente in $x_0 : x_1$
- Bestimme Nullstelle der Tangente in $x_1 : x_2$
- und so fort. . .

Man erhält eine Folge von Näherungen x_i , die hoffentlich gegen die Nullstelle von f konvergieren. Dabei sollte man einen guten Startwert, zum Beispiel aus einer Wertetabelle oder eine Skizze, wählen. Außerdem sollte man möglichst Startwerte mit flachen Tangenten vermeiden.

Die Tangente in x_i berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} t(x) &= f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow x &= \underbrace{x_i}_{\text{neues } x_i} - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \end{aligned}$$

Satz 4.10 (Newton Verfahren) *Das Newton Verfahren ist definiert durch*

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Gilt für den Startwert

$$\left| \frac{f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \right| \leq 1$$

so konvergiert die Folge gegen eine Nullstelle von $f(x)$.

Beispiel 4.12 $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 3x_i + 1}{3x_i^2 - 3}$. Wähle $x_0 = 3$ (Schätzung aus Skizze):

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - \frac{0.3^3 - 3 \cdot 0.3 + 1}{3 \cdot 0.3^2 - 3} = 0.34652015 \\ x_2 &= 0.34652015 - \dots = 0.34729812 \\ &\dots = 0.34729636 \end{aligned}$$

Dies ist bereits eine gute Näherung für die Nullstelle.

Beispiel 4.13 (Babylonisches Wurzelziehen) *Man zeige, daß die Newton-Iterationsvorschrift zur Bestimmung von \sqrt{a} mit dem Babylonischen Wurzelziehen übereinstimmt.*

$$x_{i+1} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{a}{x_i} \right).$$

Die Funktion $f(x) = x^2 - a$ hat die Nullstelle \sqrt{a} . Das Newton-Verfahren dafür:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2 - a}{2x_i} = x_i - \frac{1}{2}x_i + \frac{a}{2x_i} = \frac{1}{2} \left(x_i + \frac{a}{x_i} \right)$$

4.4 Differential und Fehleranalyse

4.4.1 Differential

Definition 4.3 (*Differential*)

- Argumentzuwachs dx
- Zuwachs längs $y = f(x)$: $\Delta y := f(x + dx) - f(x)$
- Zuwachs längs der Tangente dy Differential

Steigung: $f'(x) = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = f'(x) \cdot dx$ Man würde statt Δy gerne dy verwenden. Ist die Differenz klein? $\varepsilon(x, dx) = \Delta y - dy$

Es gilt: $\lim_{dx \rightarrow 0} \varepsilon(x, dx) = 0$ und sogar $\lim_{dx \rightarrow 0} \frac{\varepsilon(x, dx)}{dx} = 0$, das heißt, ε geht schneller gegen 0 als dx .

ε geht von höherer Ordnung gegen Null als dx . dy kann als Näherung für Δy verwendet werden, falls dx "klein" ist.

$$\Delta y \approx dy = f'(x)dx$$

4.4.2 Differentielle Fehleranalyse

x sei mit einem möglichen Fehler dx behaftet. Welche Auswirkungen hat dies auf den Fehler Δy einer Funktion $f(x) : \Delta y = f(x + dx) - f(x)$

$$\underbrace{\Delta y}_{\text{Fehlerin } \varphi} \approx \underbrace{f'(x)}_{\text{Verstärkungs-faktor}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{Fehlerin } x}$$

Beispiel 4.14 *Beschleunigte Anfahrt eines PKW auf einer Strecke $s = 50\text{m}$. Die für die Strecke benötigte Zeit $t = 5\text{s} \pm 0.1\text{s}$. Gesucht: Beschleunigungswert a (und ihr Fehler).*

$s = \frac{a}{2}t^2 \Leftrightarrow a = \frac{2s}{t^2}$; s ist konstant, $t \cong x$, $a \cong y$
ohne Fehler: $a = \frac{2 \cdot 50\text{m}}{25\text{s}^2} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\begin{aligned} a'(t) &= -4st^{-3} = -\frac{4s}{t^3} \\ a'(5\text{s}) &= -\frac{200\text{m}}{125\text{s}^3} = -1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \\ \Rightarrow \Delta a &= -1.6 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot \pm 0.1\text{s} \\ \Rightarrow a &= 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \pm 0.16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

Beispiel 4.15 *BEISPIEL FEHLT*

4.5 Potenzreihen

Potenzreihen sind Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

x_0 und a_k sind fest.

Beispiel 4.16 *Einige Potenzreihen:*

- $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = e^x$
- $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$ (geometrische Reihe)
- $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} (x-1)^i = \ln(x)$

4.5.1 Konvergenzradius

Für welche x konvergiert die Reihe?

Definition 4.4 *Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzradius $R, 0 \leq R \leq \infty$, so daß die Reihe für alle x mit $|x-x_0| < R$ absolut konvergiert und für $|x-x_0| > R$ divergiert.*

Satz 4.11 *Der Konvergenzradius läßt sich berechnen durch:*

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$$

Satz 4.12 *Jede Potenzreihe $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(x-x_0)^i$ ist im Inneren des Konvergenzbereiches differenzierbar. Das heißt, es gibt in $]x_0-R, x_0+R[$ ein $f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} i a_i(x-x_0)^{i-1}$*

Beispiel 4.17

$$(e^x)' = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \right)' = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i!} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} x^{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} x^i = e^x$$

4.5.2 Taylor- und McLaurin Reihen

Polynome (auch unendliche) sind "einfache" Funktionen. Die Frage ist, wie man eine beliebige Funktion durch ein unendliches Polynom darstellen kann.

Satz 4.13 *Unter bestimmten Voraussetzungen läßt sich eine Funktion $f(x)$ in eine Potenzreihe der folgenden Form - eine sogenannte McLaurin Reihe - entwickeln:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i \end{aligned}$$

Vorsicht! Diese Darstellung gilt nur im Inneren des Konvergenzradius, der zuvor bestimmt werden muß.

Beispiel 4.18

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\sin(0)}{0!} + \frac{\sin'(0)}{1!} x + \frac{\sin''(0)}{2!} x^2 + \dots = x - \frac{1}{6} x^3 \dots \\ R &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} (2k+3)(2k+2) = \infty \end{aligned}$$

Nun wollen wir um ein beliebiges x entwickeln:

Satz 4.14 (Taylor-Formel) Für jede auf dem offenen Intervall I $(n + 1)$ mal stetig differenzierbare Funktion f und $x, x_0 \in I$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{i=x_0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_{n+1} \end{aligned}$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Wenn man das Restglied weglassen will, schätzt man R_{n+1} einfach ab. Das geht leicht, wenn die $(n + 1)$ te Ableitung auf I beschränkt ist: $|f^{(n+1)}| \leq M \Rightarrow R_{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)}|x - x_0|^{n+1}$

Beispiel 4.19 (Binomische Reihe)

$$\begin{array}{ll} f(x) &= (1+x)^n & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= n(1+x)^{n-1} & f'(0) &= n \\ f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} & f''(0) &= n(n-1) \end{array}$$

$$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} = \frac{n!}{(n-1)!i!} = \binom{n}{i} (1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$$

Insbesondere ergeben sich als Näherungen: $(1+x)^n \approx 1 + nx + \text{Restglied}$

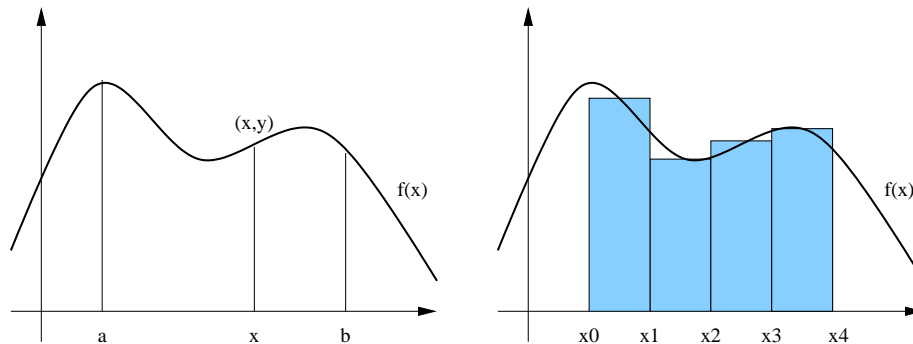
Kapitel 5

Integralrechnung

*Differentiation ist eine Wissenschaft,
Integration eine Kunst*

Die Hauptanwendung der Integralrechnung ist die Berechnung von Flächeninhalten.

5.1 Das bestimmte Riemann'sche Integral



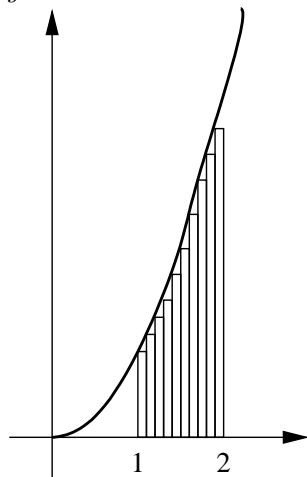
Gesucht ist der Flächeninhalt $\{(x, y) | x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$ Idee: Man nähert die Fläche durch Flächen an, deren Inhalt man kennt. Konkret:

- Zerlege $[a, b]$ in n Teilintervalle, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.
- In jedem Teilintervall wird die Fläche unter der Kurve durch das Rechteck mit der Breite $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ und der Höhe $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
- Der Flächeninhalt ist dann näherungsweise gleich der Summe der Rechtecksflächen, das heißt wir bilden die sogenannte Riemann'sche Summe.

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})}_{\text{Flächeninhalt eines Rechtecks}}$$

- Je größer die Anzahl der Rechtecke (deren Breite kleiner wird), desto genauer wird die Näherung: $n \rightarrow \infty$

Beispiel 5.1 Eine Normalparabel $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[1, 2]$ besitzt folgenden Flächeninhalt:



Untersumme: $U_{10} = 0.1 \cdot (1^2 + 1.1^2 + 1.3^2 + \dots + 1.8^2 + 1.9^2) = 2.185\dots$

Obersumme: $O_{10} = 0.1 \cdot (1.1^2 + 1.3^2 + \dots + 1.8^2 + 1.9^2 + 2.0^2) = 2.485\dots$

Bei vielen Funktionen geht die Differenz zwischen Ober- und Untersumme gegen 0, beide Konvergieren gegen dieselbe Zahl, den gesuchten Flächeninhalt.

Definition 5.1 Der Grenzwert der Riemann'schen Summe heißt das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ und wird mit $\int_a^b f(x)dx$ bezeichnet.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

Satz 5.1 Ist f stetig in $[a, b]$ bis auf endlich viele Sprungstellen, so existiert $\int_a^b f(x)dx$. Man sagt, f ist integrierbar.

- Ist $f(x) \geq 0$, dann ist die Riemann'sche Summe die Approximation des Flächeninhaltes zwischen Kurve und x -Achse.
- Ist $f(x) \leq 0$, dann kann der Flächeninhalt durch Spiegelung der Funktion an der x -Achse berechnet werden: $A = \int -f(x)dx = -\int f(x)dx$
- Andernfalls begrenzt f ein Flächenstück ober- und unterhalb der x -Achse. Dann ist $\int_a^b f(x)dx$ die Summe von vorzeichenbehafteten Flächeninhalten.

Beispiel 5.2 BEISPIEL FEHLT

5.2 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Satz 5.2 Das Riemann-Integral besitzt die folgenden Eigenschaften:

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

- $\int_a^b \alpha f(x) dx + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$
- $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$
- $|\int_a^b f(x) dx| \leq \int_a^b |f(x) dx|$

5.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Es sei $\Phi_a(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Flächenzuwachs: $\Delta\Phi_a = \Phi_a(x + \Delta x) - \Phi_a(x)$

$$\begin{aligned} f(x)\Delta x &\leq \Phi_a(x + \Delta x) - \Phi_a(x) \leq f(x + \Delta x)\Delta x \\ \Leftrightarrow f(x) &\leq \frac{\Phi_a(x + \Delta x) - \Phi_a(x)}{\Delta x} \leq f(x + \Delta x) \\ \Leftrightarrow f(x) &\leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi_a(x + \Delta x) - \Phi_a(x)}{\Delta x} = \Phi'_a(x) \leq f(x); \\ \Rightarrow &\Phi'_a(x) = f(x) \end{aligned}$$

Satz 5.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) Sei $f(x)$ stetig. Dann ist $\Phi_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar und es gilt:

$$\Phi'_a(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Interpretation: Integration ist die Umkehrung der Differentiation.

5.4 Stammfunktionen, Rechenregeln, Grundintegrale

Definition 5.2 Eine differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion von f auf I , wenn gilt: $F' = f$ auf I .

Beispiel 5.3 $f(x) = x^2 + x + 2 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 2x + 6$ ist eine Stammfunktion.

Beispiel 5.4 $f(x) = e^x \Rightarrow F_1(x) = e^x; F_2(x) = e^x + 3; \dots$ sind Stammfunktionen.

Satz 5.4 Zwei verschiedene Stammfunktionen von f auf I können sich nur durch eine additive Konstante unterscheiden: $F_1(x) = F_0(x) + c$. Ist F_0 Stammfunktion, dann erhält man mit $F(x) = F_0(x) + c, c \in \mathbb{R}$ alle möglichen Stammfunktionen. Für die Gesamtheit aller Stammfunktionen schreibt man auch:

$$\int f(x) dx$$

Definition 5.3 (unbestimmtes Integral) Als unbestimmtes Integral von f bezeichnet man die Funktionsmenge

$$\int f(x) dx = F_0(x) + c; F'_0 = f, c \in \mathbb{R}$$

Tabelle von Grundintegralen

Funktion	Stammfunktion	Definitionsbereich
c	cx	\mathbb{R}
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^{\neq 0}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{\neq 0}$
e^x	e^x	\mathbb{R}
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x)$	\mathbb{R}
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	\mathbb{R}
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	\mathbb{R}

Satz 5.5 • Ist F Stammfunktion von f und G Stammfunktion von g , so ist $F + G$ Stammfunktion von $f + g$.

• Ist F Stammfunktion von f , so ist cF Stammfunktion von cf .

Stammfunktion eines Polynoms: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \Rightarrow \int p(x)dx = a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + c$

5.5 Berechnung bestimmter Integrale mittels Stammfunktion

Satz 5.6 Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=a}^{x=b}$$

Beispiel 5.5

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 1^3 \\ &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

5.5.1 Fläche zwischen Funktionsgraphen

Satz 5.7 Es gelte: $g(x) \leq f(x), \forall x \in [a, b]$. Dann erhält man als Flächeninhalt A den von f und g in $[a, b]$ begrenzten Bereich.

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Beispiel 5.6 Die Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$ begrenzen einen Bereich, deren Flächeninhalt gesucht ist. Schnittpunkte ($f(x) = g(x)$):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x &= \frac{1}{4}x^2 - 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4 + 32}) = \frac{1}{2}(2 \pm 6) \\ &= 4, -2 \end{aligned}$$

$$\int_{-2}^4 \left(\frac{1}{2}x - \left(\frac{1}{4}x^2 - 2 \right) \right) dx = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^3 + 2x \right]_{-2}^4 = 9$$

5.6 Partielle Integration

Die Partielle Integration kann man als Umkehrung der Produktregel verstehen. Die Anwendung ist jedoch nur sinnvoll, wenn $\int uv' dx$ einfacher als $\int u'v$ ist.

$$\begin{aligned} uv &= \int (uv)' dx = \int u'v dx + \int uv' dx \\ \Leftrightarrow \int u'v dx &= uv - \int uv' dx \end{aligned}$$

Satz 5.8 (Partielle Integration) Voraussetzung ist, daß u, v auf I differenzierbar sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int u'(x)v(x) dx &= u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx \\ \int_a^b u'(x)v(x) dx &= [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx \end{aligned}$$

Beispiel 5.7 Rekursionsformeln:

$$\int \sin^n(x) dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{u'} \cdot \underbrace{\sin^{n-1}(x)}_v dx$$

$$u = -\cos(x); v' = (n-1) \sin^{n-2}(x) \cos(x)$$

5.7 Substitution

Die Substitution ist die Umkehrung der Kettenregel.

Vorgehensweise

- Festlegen einer Substitution: $u = f(x)$, $\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow dx = \frac{du}{g'(x)}$
- Einsetzen in das Integral. Das neue Integral darf die alte Variable nicht mehr enthalten!
- Berechnung des neuen Integrals
- Rücksubstitution

Beispiele

Beispiel 5.8 $\int x \cos(x^2); \quad u = x^2; u' = \frac{du}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{du}{2x}$

$$= \int x \cos(u) \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int \cos(u) du$$

$$= \frac{1}{2} \sin(u) + c$$

$$= \frac{1}{2} \sin(x^2) + c$$

Sonderfälle

$$\int f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} f(x)^2 + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

5.8 Integration gebrochen-rationaler Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen vom Typ $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ ein Polynom vom Grad m und $q(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, werden wie folgt integriert:

- Ist $m \geq n$, den polynomialen Anteil abspalten, zum Beispiel durch Polynomdivision:

$$r(x) = s_1(x) + \frac{p_1(x)}{q(x)}$$
- Als nächstes das Nennerpolynom $q(x)$ faktorisieren, gegebenenfalls mit Hilfe des Horner-Schemas:

$$q(x) = a_0(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$$
- Dann läßt sich $r(x)$ als Summe von Partialbrüchen (einfach gebrochene Funktionen) darstellen.
 - Jeder einfachen reellen Nullstelle x_k wird der Partialbruch $\frac{1}{x-x_k}$ zugeordnet.
 - Jeder p -fachen reellen Nullstelle wird die Partialsumme $\frac{A_p}{(x-x_k)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-x_k)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{(x-x_k)}$ zugeordnet.
 - Jedem Paar konjugiert komplexer Nullstellen $x_k = a + ib, x_{k+1} = a - ib$, das nur einmal auftritt, der Partialbruch $\frac{Ax+B}{x^2+cx+d}, x^2+cx+d = (x-x_0)(x-x_{k+1})$
 - Jedem p -fach konjugiert komplexen Paar der Partialbr[Auch $\frac{A_px+B_p}{(x^2+cx+d)^p} + \frac{A_{p-1}x+B_{p-1}}{(x^2+cx+d)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1x+B_1}{x^2+cx+d}$

Beispiel 5.9 BEISPIELE FEHLEN**5.9 Uneigentliche Integrale****5.9.1 Unendliches Integrationsintervall**

Definition 5.4 (Uneigentliches Integral) Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x) dx$ existiert für jedes $b > a$. Dann ist das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ definiert als:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$$

$\int_a^\infty f(x)dx$ heißt konvergent, falls der Grenzwert existiert (wenn also $f(x)$ schnell genug gegen Null geht), sonst divergent.

Beispiel 5.10 Gesucht ist das Integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx &= [\arctan(x)]_0^b = \arctan(b) - \underbrace{\arctan(0)} = 0 \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan(b) = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \int_a^\infty \frac{1}{1+x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Geometrisch ist dies der Flächeninhalt des unendlichen Bereichs, der im ersten Quadranten von der Kurve und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird.

5.9.2 Unbeschränkter Integrand

Definition 5.5 Die Funktion f sei im Integrationsintervall mit Ausnahme der Unendlichkeitsstelle $x = c$ integrierbar. Dann sind die uneigentlichen Integrale definiert als:

- $\int_a^c f(x)dx = \lim_{r \rightarrow c-} \int_a^r f(x)dx$
- $\int_c^b f(x)dx = \lim_{s \rightarrow c+} \int_s^b f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{r \rightarrow c-} \int_a^r f(x)dx + \lim_{s \rightarrow c+} \int_s^b f(x)dx$

Beispiel 5.11 BEISPIELE FEHLEN

5.10 Numerische Integration

Viele Integrale lassen sich nicht oder nur mit hohem Aufwand lösen. In diesem Fall ist eine numerische Integration sinnvoll.

5.10.1 Trapezregel

Man unterteilt das Intervall $[a, b]$ in n gleichgroße Teile $a = x_0 < \dots < x_n = b$ mit Breite $h = x_{i+1} - x_i$. Dann ersetzt man f durch einen Streckenzug und erhält Trapezflächen mit bekanntem Inhalt. Die Gesamtfläche ist die Summe der einzelnen Trapezflächen.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{x=a}^{b-h} \frac{h}{2} (f(x) + f(x+h))$$

Satz 5.9 (Fehlerschätzung für die Trapezregel) Sei $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\underbrace{T_n - \int_a^b f(x)dx}_{\text{Fehler}} = \frac{b-a}{2} h^2 \cdot f''(\rho), \quad \rho \in [a, b]$$

Bei Halbierung der Streifenbreite viertelt sich der Fehler.

5.10.2 Simpsonregel

Satz 5.10 (Fehlerschätzung mit der Simpsonformel) Eine Funktion $f(x)$ sei zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$\underbrace{s_n - \int_a^b f(x)dx}_{\text{Fehler}} = \text{FEHLT WEIL UNLESERLICH}$$

5.11 Kurvenlängen und Flächenmessung

5.11.1 Kurvenlänge

Die Länge einer Kurve in einem sehr kleinen Intervall entspricht näherungsweise der Strecke zwischen den beiden Punkten:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2 + f'(x)^2 dx^2 = dx^2(1 + f'(x)^2) \Rightarrow ds = \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Die Gesamtlänge L einer Kurve entspricht somit der Summe der Teillängen:

$$L = \sum_{i=1}^n ds \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Satz 5.11 (Länge einer Kurve) Der Graph $f = f(x)$ einer stetigen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Länge

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

5.11.2 Volumen und Mantelfläche eines Rotationskörpers

Gezeigt wird die Berechnung des Volumens und der Mantelfläche (ohne die abschließenden Kreisflächen) eines Rotationskörpers, der durch Rotation einer Funktion $y = f(x)$ um die x -Achse entsteht.

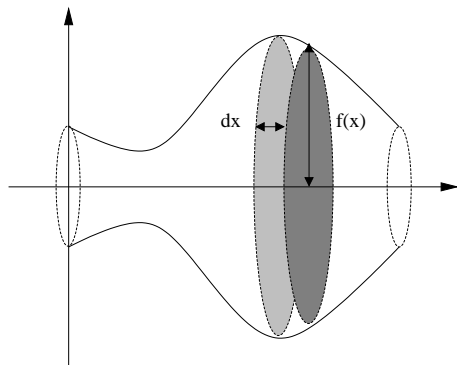
Volumen

Der Körper wird in dünne Scheiben mit Dicke dx und Radius $f(x)$ geschnitten. Daraus ergibt sich das Volumen einer Scheibe:

$$dV = \pi f(x) dx$$

Die Summe der Einzelvolumina ergibt das Volumen des gesamten Körpers:

$$V = \sum^n dV \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \int dV = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$



Satz 5.12 Ein durch Rotation der Funktion $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ um die x -Achse erzeugter Rotationskörper hat das Volumen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Mantelfläche

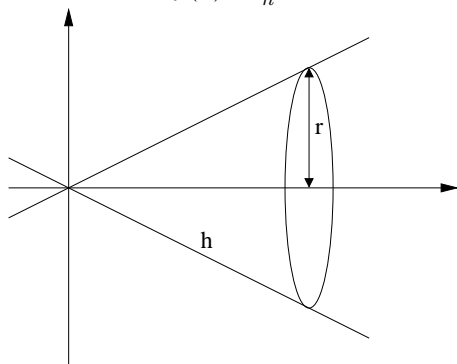
Geometrisch betrachtet ist jede Scheibe (fast) ein Kegelstumpf der Höhe ds mit den Radien r_1 und r_2 , dessen Oberfläche sich wie folgt berechnet:

$$dM = 2\pi ds \frac{r_1 + r_2}{2}$$

Die Gesamtoberfläche des Körpers entspricht der Summe der Teilflächen:

$$M = \sum^n dM \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \int dM = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Beispiel 5.12 (Volumen eines Kreiskegels) Gegeben sind die Höhe h und der Radius r . $f(x) = \frac{r}{h}x$



$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2}{h^2} x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^h = \frac{\pi r^2}{h^2} \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

Beispiel 5.13 (Oberfläche einer Kugel)

$$\begin{aligned}f(x) &= \sqrt{R^2 - x^2} \\f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\M_{Halbkugel} &= 2\pi \int_0^R \underbrace{\sqrt{R^2 - x^2}}_{f(x)} \underbrace{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}}_{f'(x)^2} dx \\&= 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{\frac{R^2 - x^2 + x^2}{R^2 - x^2}} dx \\&= 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx \\&= 2\pi \int_0^R R dx = 2\pi R [x]_0^R = 2\pi R^2 \\M_{Kugel} &= 2 \cdot M_{Halbkugel} = 4\pi R^2\end{aligned}$$

Anhang A

Übungsblätter

A.1 Blatt 1

1. Supremum und Infimum
2. Induktionsbeweis
3. Indirekter Beweis
4. Grenzwerte berechnen
5. Grenzwert für babylonisches Wurzelziehen
6. Rekursive Darstellung einer Folge
7. Bildungsgesetz einer rekursiv gegebenen Folge
8. Widerlegung durch Gegenbeispiele
9. Jäger und Hund
10. Geometrische Folge, Konvergenz
11. Konvergenz einer Reihe
12. Konvergenz von Reihen

A.2 Blatt 2

1. Fehler bei geometrischer Reihe
2. Konvergenz von Reihen
3. Horner-Schema
4. Interpolationspolynom
5. Cotangens
6. Grenzwert

7. = 5
8. Cosinus nach Sinus umwandeln
9. Sinusfunktion
10. Exponentialfunktion durch gegebene Punkte legen
11. Areafunktionen
12. Grenzwerte von Betragsfunktionen
13. Kurvendiskussion
14. Definitionsbereich
15. Umkehrfunktionen
16. Parameter, Stetigkeit
17. Kurvendiskussion

A.3 Blatt 3

1. Reelle Lösungen von Sinus und Logarithmusfunktionen
2. Strom/Zeit Funktion
3. Bewegung eines Kolbens
4. Grenzwerte
5. Nullstellen, Pole, Asymptoten
6. Ableiten mit der Definition der Ableitung
7. Sinusfunktion
8. Ableitungen von Funktionen
9. Ableitungen implizit gegebener Funktionen

A.4 Blatt 4

1. Grenzwerte
2. Tangentengleichung an Arcussinus Funktion
3. Maximaler Winkel
4. Maximales Volumen mit Newton-Verfahren
5. Mittelwertsatz
6. Minimales Wegnetz
7. Minimaler Materialverbrauch
8. Kurvendiskussion

A.5 Blatt 5

1. Nullstellenberechnung mit dem Newton-Verfahren
2. Taylor'sche Formel
3. McLaurin Reihe und Konvergenzradius
4. Schattenlänge und Ablesefehler
5. Riemann-Integral
6. Integrale berechnen mit partieller Integration
7. Integrale berechnen durch Substitution
8. Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen

A.6 Blatt 6

1. Integrale durch Partialbruchzerlegung
2. Integrale berechnen
3. Integral einer Sinusfunktion
4. Flächeninhalt zwischen Funktionsgraphen
5. Berechnung uneigentlicher Integrale
6. Fehlerabschätzung mit Trapezregel, Keplerscher Faßregel und Simpson-Formeln
7. Volumen und Schnittebene eines Rotationskörpers
8. Flächeninhalt einer Ellipse durch trigonometrische Substitution

A.7 Blatt 7

1. Kurvendiskussion einer Kurve in Parameterdarstellung
2. Partielle Ableitungen
3. Kurvenlänge einer Bahnkurve
4. Konvergenzradius von Reihen
5. Entwicklung in einer Taylorreihe und Berechnung des Konvergenzradius

A.8 Blatt 8

1. Tangentialebene an eine Fläche
2. Relative Maxima und Minima
3. Ableitung einer Kurve
4. Berechnen der Richtungsableitung
5. Fehlerrechnung bei Schwingungsdauer
6. Minimale Oberfläche bei maximalem Volumen

A.9 Blatt 9

1. allgemeine Lösung einer Differentialgleichung prüfen
2. Lösung einer Differentialgleichung durch Trennung der Variablen
3. Radioaktiver Zerfall
4. Temperaturänderungen
5. Differentialgleichung mit Anfangswert (im Stromkreis)
6. Mehrere Differentialgleichungen
7. Reihenschwingkreis
8. Maximales Volumen eines Spitzfilters

A.10 Blatt 10

1. Differentialgleichung
2. Volumenberechnung durch Dreifachintegral
3. Volumen der Schnittmenge zweier Zylinder
4. Doppelintegral mit Polarkoordinaten
5. (Fläche eines durch die Lemniskate begrenzten Gebietes)
6. Dreifachintegral über ein Gebiet
7. (Volumen und Schwerpunkt eines Gebietes)
8. (Schwerpunkt einer Achtelkugel)
9. Flächeninhalt eines Gebietes durch verschiedene Integrationsmethoden
10. Volumen der Kuppel eines elliptischen Paraboloids

Index

- Abgeschlossenheit, 1
- Ankathete, 21
- Arcus Funktion, 30
- Areafunktion, 31
- Arithmetische Stufung, 7
- Assoziativgesetz, 2
- Asymptote, 28

- Babylonisches Wurzelziehen, 8
- Bestimmte Integrale, 47
- Bestimmtes Integral, 45
- Betrag, 2
- Betragsfunktion, 20
- Beweis durch Induktion, 4
- Beweis, direkter, 4
- Beweis, indirekter, 4
- Beweisverfahren, 3
- Binomialkoeffizient, 19
- Bisektionsverfahren, 29

- Cosinus, 21
- Cotangens, 21, 23

- Differenzmenge, 1
- Direkter Beweis, 4
- Distributivgesetz, 2

- Elemente, 1
- Endliche Summe, 8
- Explizit definierte Folgen, 8
- Exponentialfunktion, 26
- Extrempunkte, 36

- Folge, 6
- Folgen, explizit definierte , 8
- Folgen, rekursiv definierte , 8

- Gebrochen-rational, 49
- Gegenkathete, 21
- Grenzwert, 8, 28
- Grundintegrale, 47

- Horner Schema, 16
- Hyperbol Funktion, 31
- Hypothense, 21

- Implizite Differentiation, 35
- Indexverschiebung, 9
- Indirekter Beweis, 4
- Induktion, 4
- Infimum, 3
- Integration durch Substitution, 48
- Integration, partielle, 48
- Integrierbarkeit, 45
- Interpolation, 17
- Intervall, 3

- Kettenlinie, 31
- Kommutativgesetz, 2
- Konvergenzradius, 42
- Kreisegel, 52
- Kurvendiskussion, 39

- l'Hopital, 39
- Limes, 8
- Logarithmusfunktion, 26

- Maximum, 36
- Menge, 1
- Mengendiagramm, 1
- Minimum, 36
- Mittelwertsatz, 37
- Monotonie, 27

- Newton-Verfahren, 39
- Numerische Integration, 50

- Partialbruchzerlegung, 49
- partiell, 48
- Partielle Integration, 48
- Polynom, 14
- Polynominterpolation, 17

- Reelle Funktionen, 14

- Reelle Zahlen, 2
- Reihe, unendliche, 9
- Rekursiv definierte Folgen, 8
- Riemann'sche Summe, 45
- Riemann-Integral, 45
- Rotation, 52

- Schnittmenge, 1
- Schranke, 3
- Simpsonregel, 51
- Sinus, 21
- Sprungstellen, 45
- Stammfunktion, 47
- Stetigkeit, 29
- Substitution, 48
- Summe reeller Zahlen, 8
- Summe, endliche, 8
- Supremum, 3
- Symmetrie, 28

- Tangens, 21, 23
- Tangente, 40
- Teilmenge, 1
- Trapezregel, 50
- Trigonometrische Funktionen, 21

- Umkehrfunktion, 30
- Uneigentliches Integral, 49
- Unendliche Reihe, 9
- unendlicher Bereich, 50
- Unendliches Integrationsintervall, 49

- Vereinigungsmenge, 1
- Volumen, 51
- Vorzugszahlen, 7

- Wendepunkt, 38
- Wurzelfunktion, 25